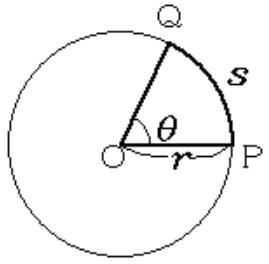


# 10. 円運動と単振動

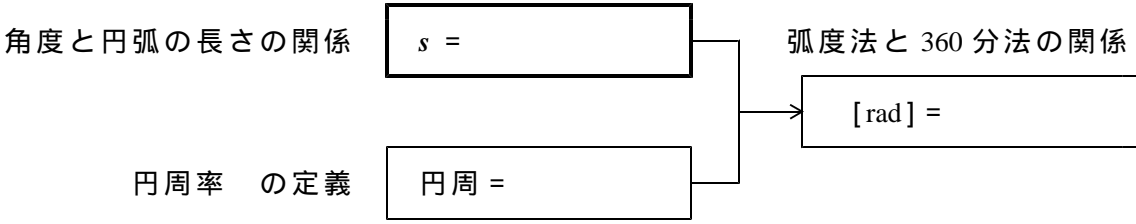
《a》等速円運動 (教科書 P.36 ~ 41、問題集 P.135 ~ 140)

## 円運動の表し方

円運動では軌道が半径一定の円と決まっているので、物体の位置は中心角のみで表すことができる。角度は**弧度法**(単位:ラジアン[rad])で測る。



弧度法の定義: 1 rad は



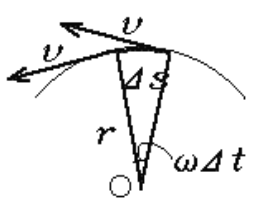
## 角速度

回転の速さは 1 秒間の回転角<sup>オメガ</sup> で表す。角速度一定の運動を**等速円運動**という。

角速度  $= \frac{\quad}{t}$  [rad/s]  $\longrightarrow$  =

時間  $t$  の間に円周にそって進んだ距離を で表す  $s =$

速さ  $v$  は 1 秒間に進む距離だから  $t = 1$  とおいて  $v =$

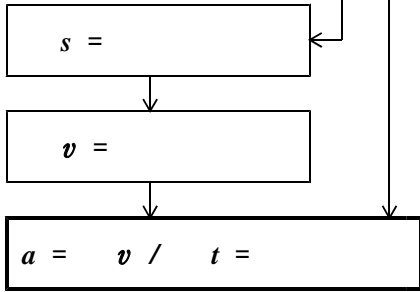


加速度を求めるために短い時間  $t$  の間の速度ベクトルの変化を調べる。

$\Downarrow$  速度ベクトルだけ  
抜き出して変化を見る



円運動の加速度



## 等速円運動における運動の三要素

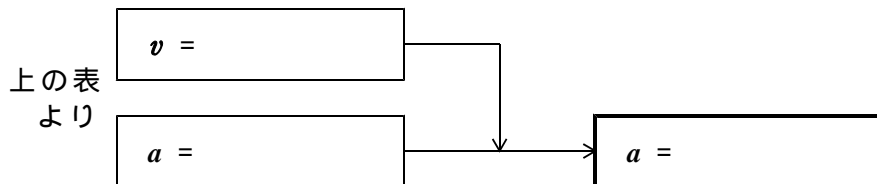
|     | ベクトルの大きさ [単位]             |
|-----|---------------------------|
| 位置  | [m]                       |
| 速度  | $v =$ [m/s]               |
| 加速度 | $a =$ [m/s <sup>2</sup> ] |



等速円運動では、速度の向きは \_\_\_\_\_、加速度の向きは \_\_\_\_\_

【問】等速円運動では速さ（速度の大きさ）は一定なのに、なぜ加速度が0ではないのか。

【問】等速円運動の加速度  $a$  を速度  $v$  と半径  $r$  で表せ。（ \_\_\_\_\_ を消去する）



## 等速円運動の周期

周期  $T$ ：軌道を一周してもとにもどってくるまでの時間

ヒント

周期  $T$  を使って角速度 \_\_\_\_\_ を表す = \_\_\_\_\_  $T$  秒で何 rad まわるか

周期  $T$  を使って速さ  $v$  を表す v = \_\_\_\_\_  $T$  秒で何 m 走るか

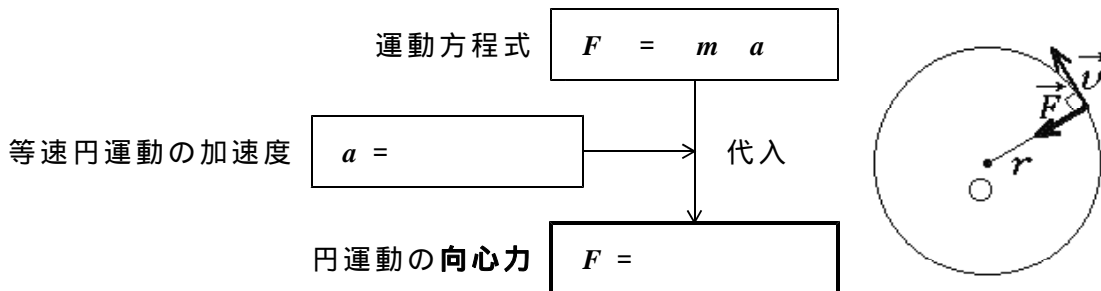
周期  $T$  を使って回転数  $n$  を表す n = \_\_\_\_\_ 1 秒に何回まわるか

【問】LPレコード（33 1/3 rpm）の回転の周期と角速度を求めよ。

【問】地球の運動が太陽のまわりをまわる等速円運動だとして、地球の公転の速さを求めよ。ただし、地球の軌道半径を  $1.5 \times 10^{11}$ m、一年を  $3.2 \times 10^7$ s とせよ。

**向心力** : 円運動を起こす力

質量  $m$  の物体が半径  $r$ 、角速度  $\omega$  の等速円運動をする場合を考える。



注) 向心力の式は、速さの変わる円運動でも各瞬間に成り立つ。

等速円運動させるためには、  に向かう力を加え続けなければならない

【問】 次の円運動において向心力の役割を果たしている力はどんな力か。

糸につけて勢いよく振り回しているおもりの運動

ターンテーブルにのせた硬貨の運動

地球のまわりをまわる月の運動

赤道上に立っている人の運動

脱水機の中の洗濯物の運動

【問】 単振り子が静止しているときと、運動中つりあいの位置を通過しているときとで、糸の張力に違いがあるか。

【問】 円運動している途中で振り子の糸を切ると、おもりはどの方向に飛び出すか。

## 等速円運動の問題解法の手順

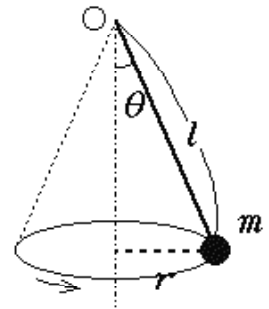
等速円運動の運動方程式

$r$  : 半径、  $\omega$  : 角速度

回転の速さに関する情報が与えられているとき  
 速さ、周期などから角速度  $\omega$  を求める。  
 円運動の運動方程式に、半径  $r$ 、角速度  $\omega$  の値を代入する。  
 より求まる向心力  $F$  の大きさから、他の力を求める。

力に関する情報が与えられているとき  
 物体にはたらく力を図示し、向心力になる力  $F$  の大きさを求める。  
 円運動の運動方程式に、力  $F$ 、質量  $m$ 、半径  $r$  の値を代入する。  
 より角速度  $\omega$  の値を求める。  
 周期、速さなど、目的の量を  $\omega$  より求める。

【問】右の図のような、糸の長さ  $l$ 、糸の傾き  $\theta$  の円錐振り子の周期を求めよ。(重力加速度  $g$ )



まず、力を図示し、向心力の大きさを作図で求める。

向心力の大きさ

$$F =$$

円運動の運動方程式に代入

$$mr\omega^2 =$$

$r$  を  $l$  と  $\theta$  で表す

$$r =$$

代入

$$=$$

角速度を求める

$$=$$

周期と角速度の関係

$$T =$$

代入

円錐振り子の周期

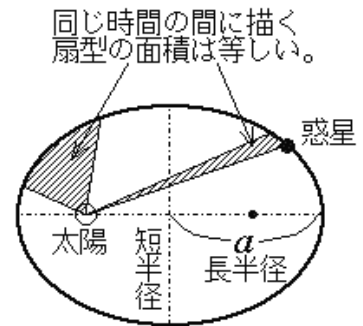
$$T =$$

【問】自転車が半径  $r$  の円形コースを滑らずに走ることでできる限界の速さを求めよ。車輪と地面の間の摩擦係数を  $\mu$ 、重力加速度を  $g$  とする。車体はどれほど内傾したらよいか。

《b》万有引力と天体の運動 (教科書 P.57 ~ 64、問題集 P.146 ~ 149)

ケプラーの法則

第一法則：**軌道楕円の法則** (1609年)  
惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。  
第二法則：**面積速度一定の法則** (1609年)  
惑星と太陽が結ぶ線分が一定時間に通過する面積(面積速度)は一定である。  
第三法則：**調和の法則** (1619年)  
惑星の公転周期の二乗は、楕円の長半径の三乗に比例する。



公転周期  $T$ 、楕円の長半径  $a$  として  
第三法則(調和の法則)を式に表す。

【問】月の公転周期は約 27 (= 3<sup>3</sup>) 日である。静止衛星は 1 日に 1 回地球のまわりを公転する。その軌道は月までの距離の何分の 1 の所にあるか。ケプラーの第三法則を使って考えよ。

万有引力の法則 (1665年 Newton)

質量を持つ二物体は必ず**万有引力**を及ぼし合う。その大きさは、それぞれの物体の質量に比例し、物体間の距離の二乗に反比例する。

万有引力の法則の式

$$F =$$

$m_1, m_2$  各物体の質量  
 $r$  物体間の距離  
 $G$  万有引力定数

万有引力定数

$$G =$$

$$\text{Nm}^2/\text{kg}^2$$

注)  $G$  の測定は 1798 年、キャベンディッシュにより初めて行なわれた。

重力加速度と万有引力

地表で物体にはたらく重力は、物体と地球の間にはたらく万有引力にほかならない。物体と地球の重心の間の距離は、地球の半径  $R$  である。

重力 = 万有引力より

$$mg =$$

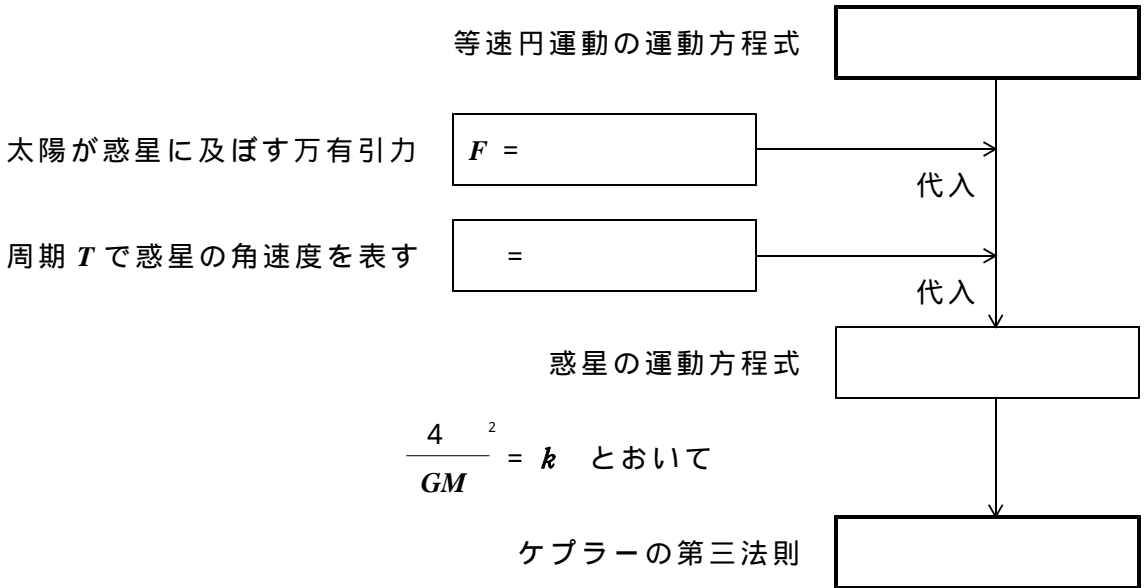
地表での重力加速度

$$g =$$

【問】地球の半径を  $6.4 \times 10^6\text{m}$ 、地球の質量を  $6.0 \times 10^{24}\text{kg}$ 、万有引力定数を  $6.7 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$  として地表での重力加速度を計算してみよ。

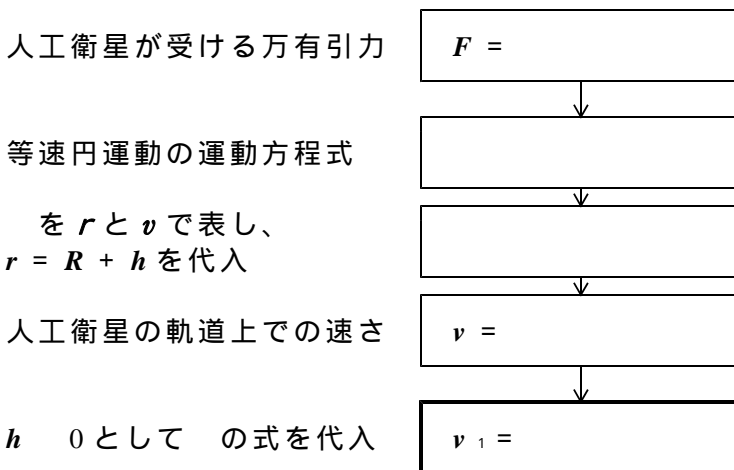
### 万有引力の法則からケプラーの第三法則を導く

惑星は等速円運動をしているものとし、軌道半径を  $r$ 、周期を  $T$  とする。また太陽の質量を  $M$ 、惑星の質量を  $m$  とする。

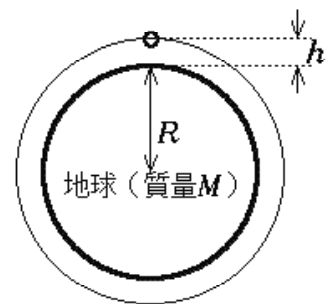


### 第一宇宙速度

地上から高度  $h$  の円軌道をまわる人工衛星の速さを求めてみよう。地球半径を  $R$  とする。



人工衛星（質量  $m$ ）



$R = 6.4 \times 10^6\text{m}$  に対し、  
 $h$  は  $2 \sim 5 \times 10^5\text{m}$  程度。

### 第一宇宙速度

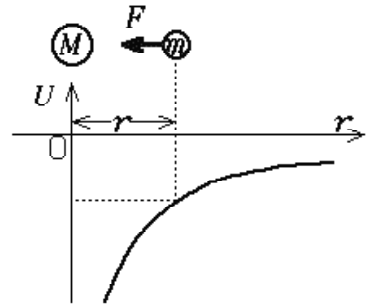
【問】  $g = 10\text{m/s}^2$ 、 $R = 6.4 \times 10^6\text{m}$  として第一宇宙速度の値を計算せよ。

《c》万有引力による位置エネルギー (教科書 P.62 ~ 66、問題集 P.146 ~ 149)

質量  $M$  の天体から距離  $r$  のところにある  
質量  $m$  の物体の万有引力による位置エネルギー

$$U =$$

$G$ : 万有引力定数



注) 万有引力による位置エネルギーの基準は無有限遠。  
つまり  $r \rightarrow \infty$  で  $U = 0$  となるようにとる。  
有限の距離では  $U$  は必ず負である。

【問】質量  $1 \text{ kg}$  の物体の地表での万有引力による位置エネルギーはいくらか。  
重力加速度  $g = 10 \text{ m/s}^2$ 、地球半径  $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$  として求めよ。

発展 静電気力との類似性

万有引力の大きさ  $F = G \frac{Mm}{r^2}$

静電気力の大きさ  $F = k \frac{Qq}{r^2}$

万有引力による位置エネルギー  $U = -G \frac{Mm}{r}$

静電気力による位置エネルギー  $U = k \frac{Qq}{r}$

万有引力に関する力学的エネルギー保存の法則

力学的エネルギー保存の法則 (一般)

$$K + U = \text{一定}$$

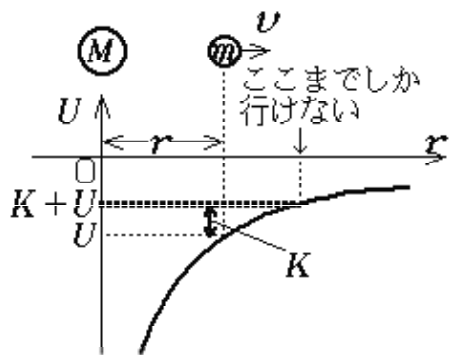
$K$ : 運動エネルギー

$U$ : 位置エネルギー

物体の質量  $m$ 、速さ  $v$ 、母天体の質量  $M$ 、母天体からの距離  $r$  のとき



万有引力の場合、 $K \geq 0$ 、 $U < 0$  だから、  
力学的エネルギー  $K + U < 0$  だと  $r$   
とすることはできない。つまり、母天体  
のまわりに束縛された運動になる。

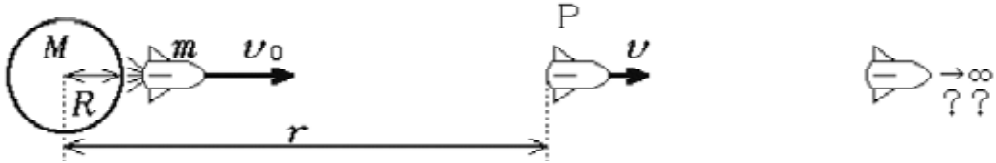


太陽のまわりの惑星の運動、地球のまわりの人工衛星の運動は、このような束縛運動で、力学的エネルギー (全エネルギー) は負になっている。

## 第二宇宙速度

地球から投げ出された物体が、地球の重力圏を離脱して、永遠に宇宙の旅を続けられるようになる最低の初速度を**第二宇宙速度**または**脱出速度**という。

地上から初速度  $v_0$  で宇宙空間に投げ出された質量  $m$  の物体の運動を考える。地球の質量を  $M$ 、半径を  $R$  とする。



発射時の運動エネルギー  $K_0 =$

発射時の位置エネルギー  $U_0 =$

地球の中心からの距離が  $r$  の点 P における速さを  $v$  とすると

点 P での力学的エネルギー  $K + U =$

力学的エネルギー保存の法則より

$v^2 =$

$r$  でも  $v^2 > 0$  であるための条件

**第二宇宙速度 (脱出速度)**  $v_2 =$

注) 第二宇宙速度は第一宇宙速度の  $\sqrt{2}$  倍である。

【問】  $g = 10\text{m/s}^2$ 、 $R = 6.4 \times 10^6\text{m}$  として第二宇宙速度を計算せよ。

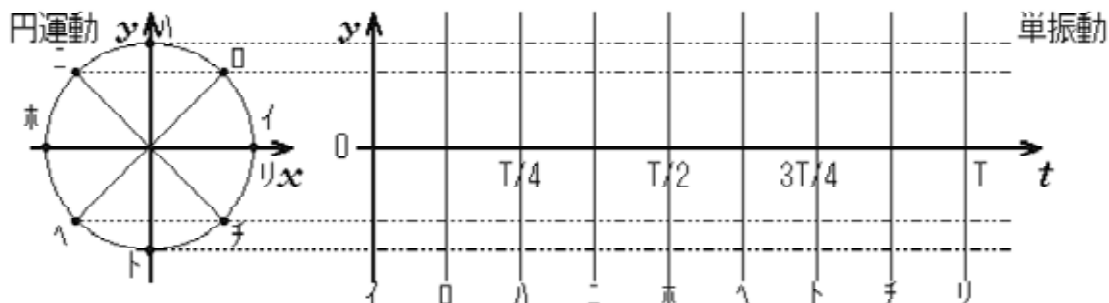
【問】 中心天体の質量を  $M = 2.0 \times 10^{30}\text{kg}$  (太陽質量) として、この天体の表面からの脱出速度が  $v_2 = 3.0 \times 10^8\text{m/s}$  (光速) になる半径  $R$  を求めよ。



《d》単振動 (教科書 P.47 ~ 56、問題集 P.141 ~ 145)

等速円運動の分解

【作業】等速円運動の  $y$  座標の変化をグラフに描け



等速円運動の一次元の成分を取り出した直線上の運動が**単振動**である。

半径  $A$ 、角速度  $\omega$  の等速円運動に対応する単振動

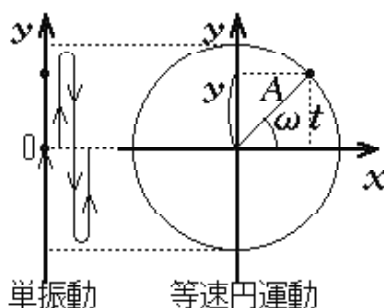
回転の中心角

=

時間 :  $t$

単振動の変位の式

$y =$



注) 単振動では  $A$  [m] を**振幅**、 $\omega$  [rad/s] を**角振動数**、 $t$  [rad] を**位相**とよぶ。

振動数と周期

振動数  $f$  [Hz] : 1 [s] あたりの往復回数 ( 円運動の回転数  $n$  に対応 )

振動数を周期  $T$  で表す

$f =$

この関係は波動や円運動でも共通

角振動数を周期  $T$  と振動数  $f$  で表す

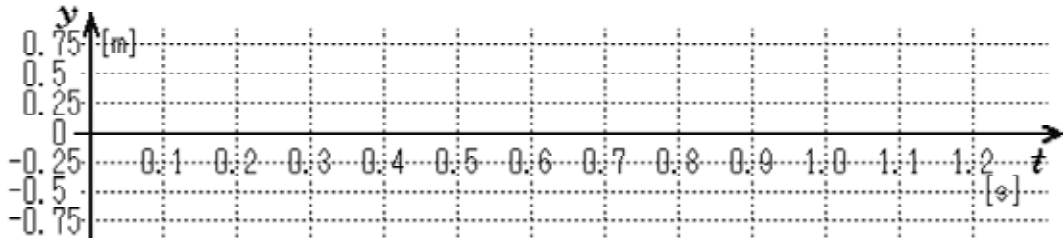
=

=

【問】時刻  $t$  [s] における変位  $y$  [m] が、 $y = 0.5 \sin 5t$  で表される単振動の、  
振幅・角振動数・周期・振動数をそれぞれ単位を添えて書け。

$A =$  \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ,  $T =$  \_\_\_\_\_ ,  $f =$  \_\_\_\_\_

【問】前問の単振動の  $y-t$  図を描け。



### 単振動の速度と加速度

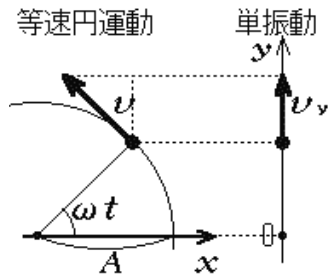
単振動の速度      等速円運動の速度の  $y$  成分

等速円運動の速度の大きさ

$$v = \boxed{\phantom{000}}$$

単振動の速度

$$v = \boxed{\phantom{000}}$$



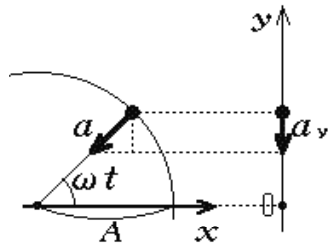
単振動の加速度      等速円運動の加速度の  $y$  成分

等速円運動の加速度の大きさ

$$a = \boxed{\phantom{000}}$$

単振動の加速度  
(符合に注意)

$$a = \boxed{\phantom{000}}$$



### 単振動における運動の三要素 (以下 $y$ を $x$ と読み替える)

|     |       |
|-----|-------|
| 変位  | $x =$ |
| 速度  | $v =$ |
| 加速度 | $a =$ |

$A$  : 振幅  
 $\omega$  : 角振動数

代入、 $t$  を消去

変位と加速度の関係

$$a = \boxed{\phantom{000}}$$

運動方程式

$$\boxed{\phantom{000}}$$

$a$  を代入して力を求める

変位に比例して逆向き

単振動を起こす力(復元力)

$$F = \boxed{\phantom{000}}$$

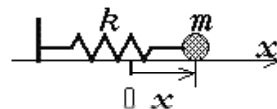
「変位に比例して逆向きに働く力」は単振動をひきおこす。  
単振動の位置・速度・加速度は三角関数の微分の関係で結ばれていることに注目しよう。

## 単振動になる運動の問題解法の手順

物体にはたらく力を図示し、運動方程式を立てる。  
 運動方程式を整理し、加速度  $a$  を求める。(つりあいの式を活用)  
 $a = -\omega^2 x$  と比較して、角振動数  $\omega$  を求める。  
 $\omega$  をキーに他の必要な物理量を求める。

### 水平ばね振り子の周期

なめらかな水平面上で直線にそって振れる、ばね定数  $k$  のばね振り子を考える。自然長の位置を原点にとり、そこからの変位が  $x$  のときを考える。



おもり (質量  $m$ ) にはたらく力を図示せよ。

運動方程式

加速度を求める

 $a =$  

水平ばね振り子の周期

$a = -\omega^2 x$  と比較して

 $T =$  
 $\omega =$  

角振動数

### 鉛直ばね振り子の周期

ばね定数  $k$ 、おもりの質量  $m$  の鉛直ばね振り子を考える。

変位  $x$  をつりあいの位置から測るのが重要なポイント!

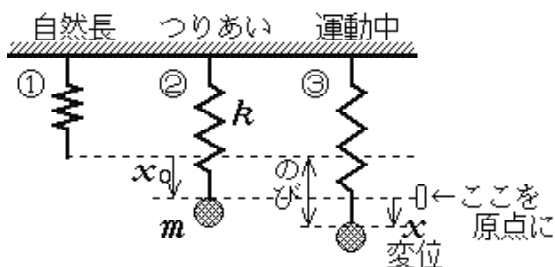


図 ③ の状態 (運動中) の運動方程式

$m a =$

図 ② でのつりあいの式

代入して整理

加速度を求める

$a =$

鉛直ばね振り子の周期

$T =$

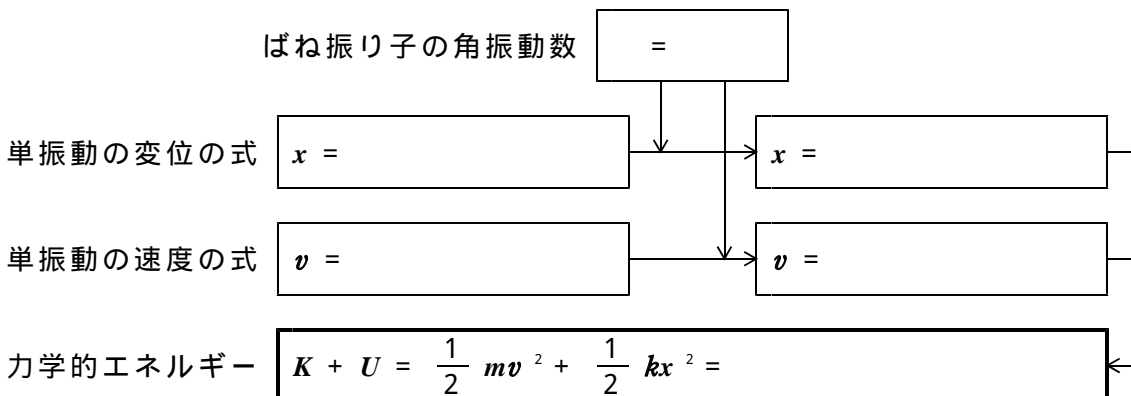
$\omega =$

水平ばね振り子の結果と比べてみよう。重力によらない!

【問】ばね振り子でおもりの質量を2倍にすると周期は何倍になるか。また、同じばねを2個直列につないだ場合はどうか。

## 単振動における力学的エネルギーの保存

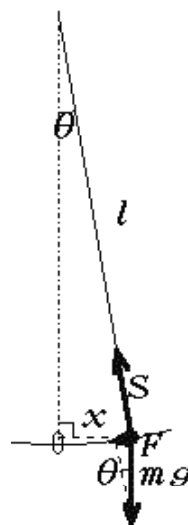
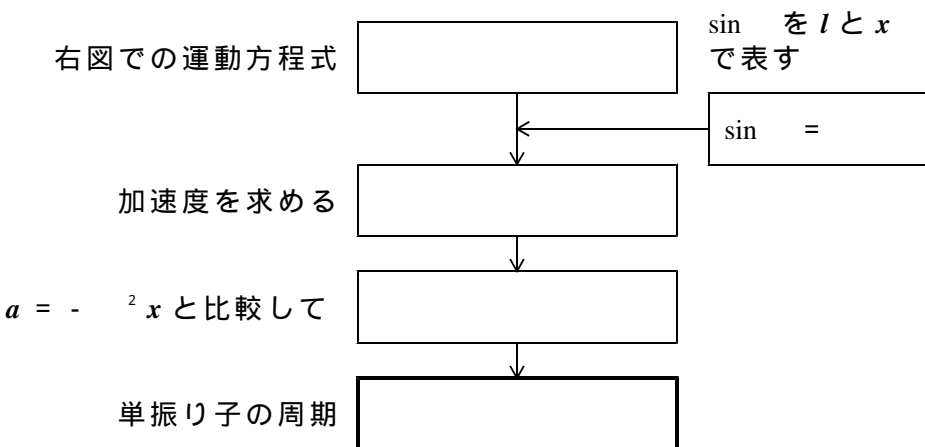
ばね定数  $k$ 、おもりの質量  $m$  のばね振り子が振幅  $A$  の単振動をしている場合を考える。



単振動では力学的エネルギー  $K + U$  は一定である。

## 単振り子の周期

糸の長さ  $l$ 、おもりの質量  $m$  の単振り子を考える。  
鉛直線からの横ずれ変位を  $x$  とする。振れの角は十分小さく、おもりの運動はほとんど直線運動と見なせる。重力の接線成分  $F$  が復元力になっていると見てよい。



おもりの質量によらない！

【問】ひもの長さ 1.0m の単振り子の周期を求めよ。重力加速度を  $9.8\text{m/s}^2$ 、 $\sqrt{5} = 2.24$  とする。

**発展的復習 単振動と正弦波**

直線上に等間隔に並んだ質点  $P_0 \sim P_9$  があり、 $P_0$  が行う単振動が、次々に隣の点に伝わって、正弦波を作るとする。振幅を  $A$ 、周期を  $T$  として、時刻  $t$  における点  $P_0$  の単振動の変位  $y_0$  は次の式で表されるものとする。

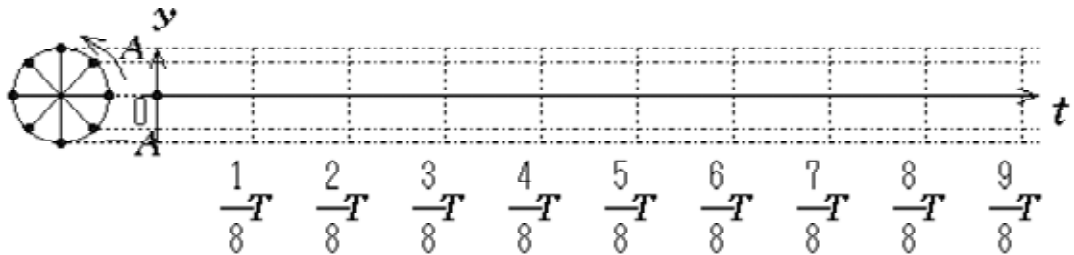
点  $P_0$  の単振動の変位

$$y_0 =$$

**【作業 1】 振動のグラフ**

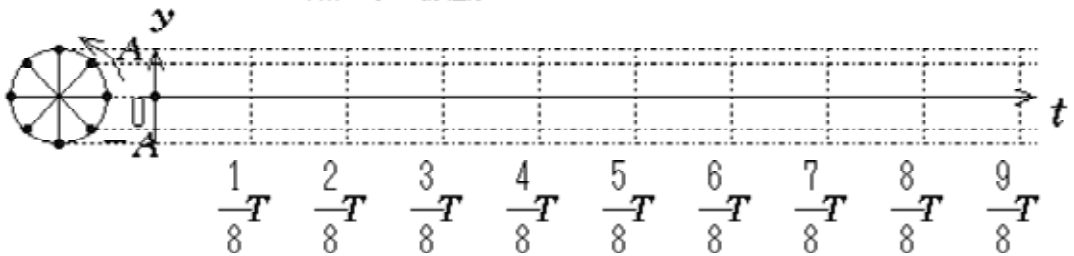
$P_0$  の変位の時間変化をグラフに描け。横軸が時間  $t$  であることに注意せよ。

点  $P_0$  の振動のグラフ



隣の点  $P_1$  は  $P_0$  より  $1/8T$  だけ遅れて単振動を始めるものとする。 $P_1$  の変位の時間変化をグラフに描け。

点  $P_1$  の振動のグラフ



$P_1$  の変位の時間変化のグラフを式で表せ。

点  $P_1$  の単振動の変位

$$y_1 =$$

波の速さを  $v$  とすると、任意の座標  $x$  の点  $P$  では  $x/v$  だけ遅れて振動が起こる。点  $P$  の単振動の変位  $y$  を表す式を作れ。

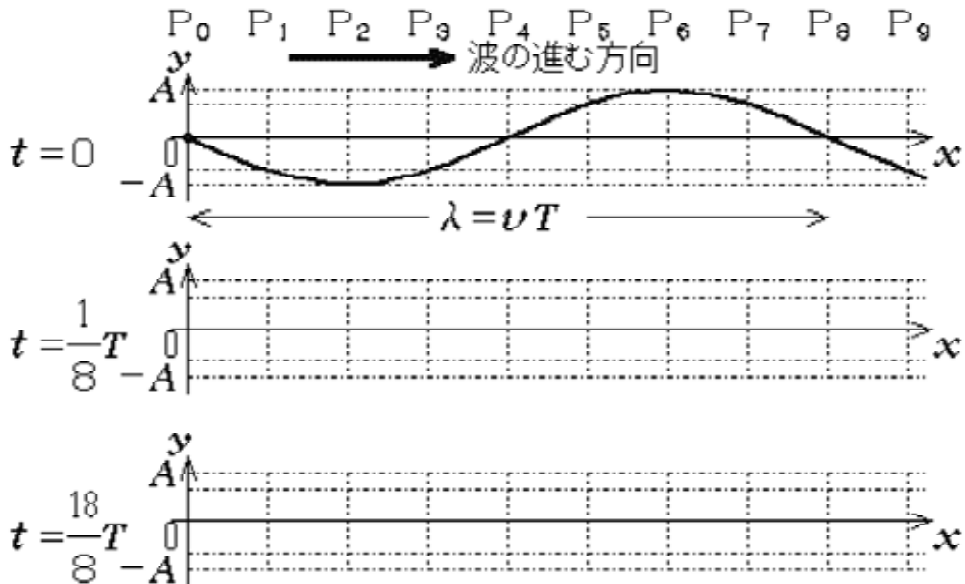
座標  $x$  の点の変位

$$y =$$

正弦波の式

【作業 2】波形のグラフ

波が、 $t = 0$  で下図の波形をしているものとする。この波は速さ  $v$  で  $x$  軸方向に進んでいる。 $t = 1/8T$  と  $t = 18/8T$  の波形を描け。時間  $1/8T$  の間に進む距離を参考にして描くとよい。



【問】上の各時刻の波形の正弦曲線を三角関数を使った式でそれぞれ表現せよ。横軸が  $x$  であることに注意する。

【問】波が  $t$  秒間に  $vt$  だけ進むことを考慮して、任意の時刻  $t$  の波形を表す式を求めよ。

《まとめ》

波の基本式

$v =$

正弦波の式

$y =$

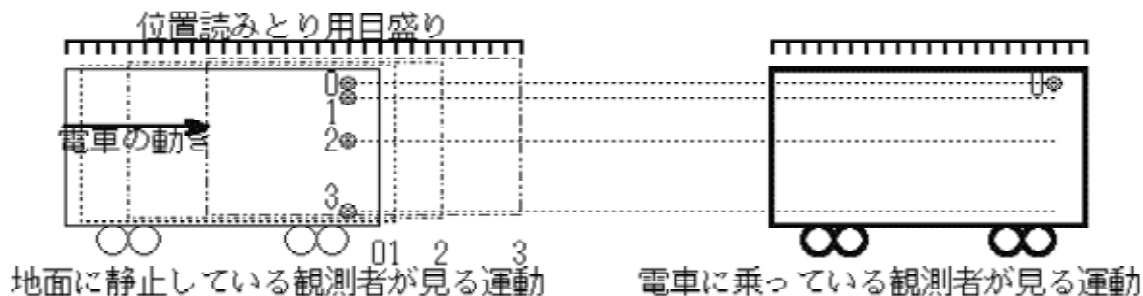
$y =$

振幅  $A$ 、速さ  $v$ 、周期  $T$  の波による、任意の座標  $x$ 、任意の時刻  $t$  の変位  $y$  を表す式。

《e》慣性力 (教科書 P.42 ~ 46、問題集 P.135 ~ 140)

慣性力

【作業1】列車が動き出すと同時に自由落下を始めた小球の運動を、車内の観測者が見るときの運動のようすを作図せよ。



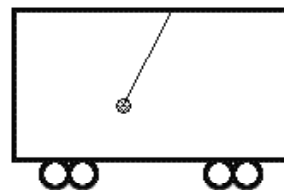
小球には重力のみがはたらき鉛直に自由落下する。これとは別に電車は水平に等加速度運動をする。

慣性系 (静止系)

非慣性系 (加速度系)

加速度  $\vec{a}$  で運動する座標系では、普通の力の他に  $-\vec{ma}$  という慣性力を考える

【問】加速度運動する電車の中につるした振り子の状態について、静止系と加速度系の双方の立場からそれぞれ説明せよ。



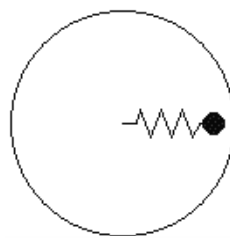
遠心力



慣性系 (静止系)

観測者は静止

おもりはばねの力  $kx$  を向心力として等速円運動している。



非慣性系 (回転系)

観測者も共に回転

おもりにはたらくばねの力  $kx$  と慣性力がつりあい、静止している。

円運動の運動方程式

つりあいの式

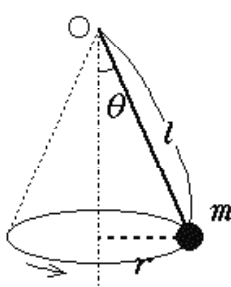
角速度  $\omega$  で回転している座標系では、普通の力の他に、 $m\omega^2 r$  という慣性力（遠心力）が外向きにはたらくと考える。（ $m$ ：質量、 $r$ ：中心からの距離）

注）遠心力は慣性力の一種であるから、非慣性系の立場でのみ用いられる。静止した立場をとりながら遠心力という用語を用いないこと。

【問】宙返りジェットコースターを見上げている観客が、「車内の人には遠心力がはたらいているから落ちないのだ。」と説明したとすれば、どこがまちがっているか。

【問】急カーブを曲がるバスの車内で、カーブの外側によろけていく乗客を、地面に立って静止して観察している人はどう説明すればよいか。

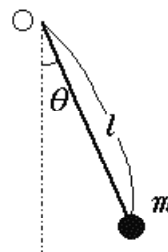
【問】円錐振り子の運動を静止系と回転系のそれぞれの立場から説明し、周期を求めよ。



### 静止系

振り子は等速円運動して見える。

円運動の運動方程式



### 回転系

振り子は傾いたまま静止して見える。

力のつりあいの式

【問】地球の自転によって、1.0kg の物体が赤道上で受ける遠心力は何 N か。それは自転を考えないときの重力の何%に相当するか。地球の半径を  $6.4 \times 10^6$  m、角速度を  $7.3 \times 10^{-5}$  rad/s として計算せよ。