水鉄砲の穴をめぐって

湘南台高校・山本明利

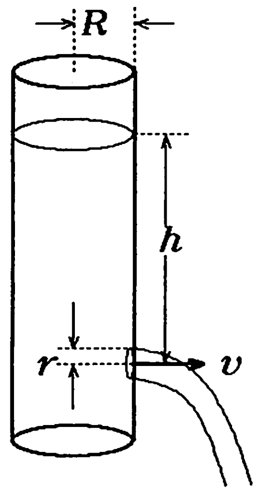
1．話の発端

ことの起こりは、右近さんが問題提起された一件です。98/10/12のＮＨＫ「やってみようなんでも実験」で放送された、「水鉄砲は穴が小さいほどよく飛ぶ」理由の解説はおかしいのではないかという議論でした。ＹＰＣニュースNo.128にもあるように、この放送には同様のクレームが多数寄せられたとのことで、10/17の再放送では当該シーンは訂正されていました。

この話題から派生して、98/10/21の例会では、ＰＥＴボトルの同じ高さのところに大小の穴をあけたら、どちらの穴から出た水が遠くへ飛ぶかという実験が行なわれました。圧力が同じだから飛距離は等しいと思いきや、大きい穴の方が飛距離が大きいという結果でした。

その理由については、例会の席で右近さんの解説があり（ＹＰＣニュースNo.128、p.93参照）、一同、一応は納得したのでしたが、その後メーリングリストで高橋さんから問題の再提起がありましたので、この件について再点検し、整理をしてみたいと思います。

2．理想的な場合



まず、理想的な場合を考えましょう。右のような装置を想定します。半径Rの円筒型の容器の薄い壁に、半径rの円形の穴をあけ、穴の位置から測って高さhのところまで、密度ρの液体が入っているものとします。重力による圧力差で穴からは速さvで液体が噴出します。粘性のない非圧縮性流体を考えると、ベルヌーイの定理により

$$\frac{1}{2}\rho v^2+P_0=\frac{1}{2}\rho V^2+P_0+\rho g h \quad \cdots\cdots(1)$$

が成り立ちます。ここにP_0は周囲の大気圧、Vは容器内の液面の降下する速さです。大気圧の差は無視してよいので、整理して

$$v^2=V^2+2gh \quad \cdots\cdots(2)$$

を得、さらに容器が十分大きくてVが無視できる場合には、次式を得ます。

$$v=\sqrt{2gh} \quad \cdots\cdots(3)$$

これを仮に理想流速と呼ぶことにしましょう。

3．右近理論とその困難

次に、右近さんの解説を復習します。流体の連続性を考えると、流下した体積と噴出した体積は等しくなければなりませんから、

$$\pi r^2 v=\pi R^2 V \quad \cdots\cdots(4)$$

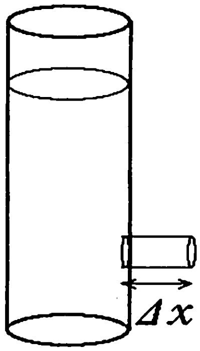
が成り立つので、これをVについて解いたものを(2)式に代入して整理すると、次式を得ます。

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^4}} \quad \cdots\cdots(5)$$

これを右近式と呼ぶことにします。右近式によると穴の半径rが大きいほどvが大きくなることが示され、Rがrに比べて十分大きい場合には(3)の理想流速に一致するので、定性的には実験の結果を説明しているように見えます。

しかし、右近式には一つ困ったことがあります。それは穴を大きくしていった場合です。rがRに近づくにつれ、vは急速に増大し、発散してしまうのです。容器内の流体が加速度運動をしてしまうような条件のもとではこの式は使えません。

4．表面張力からのアプローチ



つぎにちょっと視点を変えて、噴出した流体の部分の表面の自由エネルギーを増すための仕事という観点からアプローチできないかと考えてみました。やはり(1)～(3)式をベースに考えることにします。

半径rの穴から水柱がΔxだけ押し出されたときをイメージして、体積$\pi r^2\Delta x$を(2)の両辺にかけます。このエネルギー保存の式において、$2\pi r\Delta x$という円柱の表面を新たに形成するために行われる仕事$2\pi r\Delta x\sigma$（ここにσは水の表面張力）を考慮し、Rがrに比べて十分大きい（Vが無視できる）ものとして

$$\frac{1}{2}\pi r^2\Delta x\rho v^2+2\pi r\Delta x\sigma=\pi r^2\Delta x\rho gh \quad \cdots\cdots(6)$$

という式をたててvについて解くと、

$$v=\sqrt{2gh-\frac{4\sigma}{\rho r}} \quad \cdots\cdots(7)$$

となります。これを仮に山本式と呼ぶことにします。山本式ではやはりrが大きいほど流速vが大であるという結果が導かれます。さらにrが十分大きいとき理想流速に一致するという結果となり、右近式の発散の困難を解決して、リーズナブルであるように感じられます。しかし、やはりベルヌーイの定理から出発していますから、あくまでも定常流が前提となります。山本式は容器の半径Rを含みませんが、Rはrに比べてかなり大きい場合に適用されると考えるべきです。

右近式と山本式のr依存性のちがいをグラフにして示すと図１のようになります。グラフの計算にあたっては、ρやσは常温における水の値を用い、容器の半径Rは3.5cm、水位hは10cmとしました。穴の半径が20mmより大きいときと、1mmより小さいときに両者の差が大きくなります。

5．しきい水位

山本式(7)では、根号内の第２項が$2gh$よりも大きくなるとvは虚数になってしまいます。液体が流出して水位hが下がると、いずれこの困難に直面することになります。これをどう考えたらよいのでしょうか。

式(7)は次のように変形できます。

$$v=\sqrt{2g\left(h-\frac{2\sigma}{\rho g r}\right)} \quad \cdots\cdots(8)$$

このとき（）内の第二項　$2\sigma/\rho g r$　は、半径がrの穴から水が漏らないしきい水位h_0を与えるものと解釈できます。つまり、表面張力に打ち勝って穴から出るには穴の径に応じた圧力が必要で、これだけの水柱の高さに相当する圧力をロスしてしまうので、その分をhから差し引いて考えよ、という意味に解釈できると思います。

6．「水ももらさぬ」穴

上の考察とは逆に、水位hを固定しておいて穴を小さくしていくと、表面張力のため水が出なくなる限界があります。その半径をr_0とするとラプラス・ヤングの式から

$$\rho g h=\frac{2\sigma}{r_0} \quad \cdots\cdots(9)$$

が成り立ちます。右辺が表面張力による圧力差を表します。これから

$$r_0=\frac{2\sigma}{\rho g h} \quad \cdots\cdots(10)$$

となります。水位hに対して、穴の半径が上式で与えられる大きさ以下だと液体はこぼれないというわけです。

さて、式(10)がrの下限であれば、式(7)で

$$2gh-\frac{4\sigma}{\rho r} \;>\; 2gh-\frac{4\sigma}{\rho r_0}=0$$

なので、必ず

$$0<v<\sqrt{2gh} \quad \cdots\cdots(11)$$

となり、まことに好ましい結果に見えます。これでよければ、穴の径による噴流の流速の違いは主として表面張力による効果であると結論できるのですが・・・。

7．測定結果はいかに

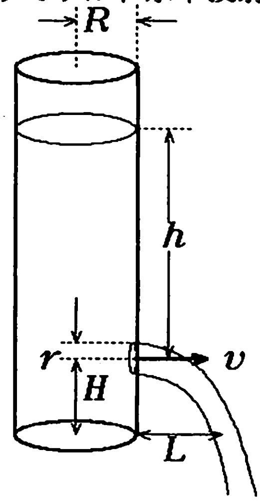
どんなに美しい理論も現実との一致がなければ画餅にすぎません。理論の妥当性を検証するのはやはり実験によるべきでしょう。試みに、液体として水を考え、その表面張力$\sigma=73\times10^{-3}$N/m（常温）、水の密度$\rho=10^3$kg/m^{3}を代入すると

式(10)の半径　$r_0=1.5\times10^{-5}/h$　または　しきい水位　$h_0=1.5\times10^{-5}/r$

となります。ＰＥＴボトルをイメージして水位を$h=0.2$mとすると、$r_0=0.074$mmとなり、穴の径がこれ以下だと水は流出しないことになります。この条件は実験できないことはありませんが、半径0.1mm以下の穴を正確にあけるのは、実は簡単ではありません。

そこで、逆に穴の径を決めて、しきい水位を観測することにします。$r=0.5$mmに対し上式よりh_0＝約３cmとなります。この実験は簡単です。ドリルでＰＥＴボトルに直径１mmの穴をあけます。水を満たして水を噴出させ、そのまま放置して、どの水位で流出が止まるかを観察すればよいのです。しかし、残念ながら実験は失敗でした。予想される３cmに近づくにつれ流出速度は限りなく０に近づいていくのですが、最終的に水流はＰＥＴボトルの壁をつたう形になり、一種の毛管現象で流出が続くのでした。水がある程度ＰＥＴを「濡らす」ことによる現象と思われます。容器の底に直径１mmの穴をあけ、水を流下した場合も、確かに水の流出は途中で止まりますが、そのときの水位は予想されるh_0の半分ほどになってしまいます。

そこで次に、水位hに対する流速vの変化を連続的に測定してみることにしました。テニスボールの空き缶（R=3.5cm）の底から高さH=2.5cmのところにr=0.5mmの穴をあけ、水を流出させながら水位hと水平到達距離Lの関係を測定します。本当は連続した噴流は粘性のため懸垂線（カテナリ）を形成するはずですが、水平投射と見てLを$t=\sqrt{2h/g}$ =0.071秒で割った値をvの測定値としました。



水の場合の測定結果と式(5)および(7)の計算値の比較を図２に示します。どちらの式も測定値との一致はよいとは言えません。しきい水位の存在は山本式に分がありますが、曲線全体の形はむしろ右近式に近いとも言えます。

試みに、オリフィス（薄い板にあけた鋭い円形の穴）の経験的流量係数0.62を上記の計算値にかけてみたものが図３です。確かに一致はよくなりますが、曲線の傾向が若干異なるようです。流量係数がどのようにして決まるのかは不勉強でまだよく知らないのですが、表面張力より支配的な要素があるのかも知れません。

表面張力や密度の異なる液体も比較してみましょう。図４はメタノールによる測定結果です。装置は水の場合と同じものを用いました。やはり、しきい水位の存在以外はよい一致とは言えません。精密な測定はしていませんが水に洗剤を混ぜた場合も水平到達距離Lがやや伸びるのが観測されます。

８．今後の展望

今回は時間の関係で以上の中間報告にとどめますが、さらに穴の径を変えたときの流速の変化、容器の径を変えたときの流速の変化を定量的に測定してみたいと思っています。水をはじく材料での実験もしてみたいと考えています。

右近式と山本式の融合は可能です。両者の条件は排他的ではありませんから、一つの式にまとめることはできます。容器に対して穴が小さい範囲ではそれで正しいはずなのですが、しかしそれでも計算値と測定値の大幅なずれの問題は解決しません。

井上賢さんからは、例会の席で「噴流は穴を出た直後にすでに乱流になっているはずで、そこでエネルギーをロスしているのだ。」とのコメントをいただきました。流量係数はそのへんを反映しているのかもしれません。もう少し勉強をしてみたいと思います。

水鉄砲に端を発したこの話題、意外と奥が深くて面白いですね。今は高等学校では教えなくなってしまった流体力学も、身に付けておくべき大切な知識なんだなあと思いました。

図1

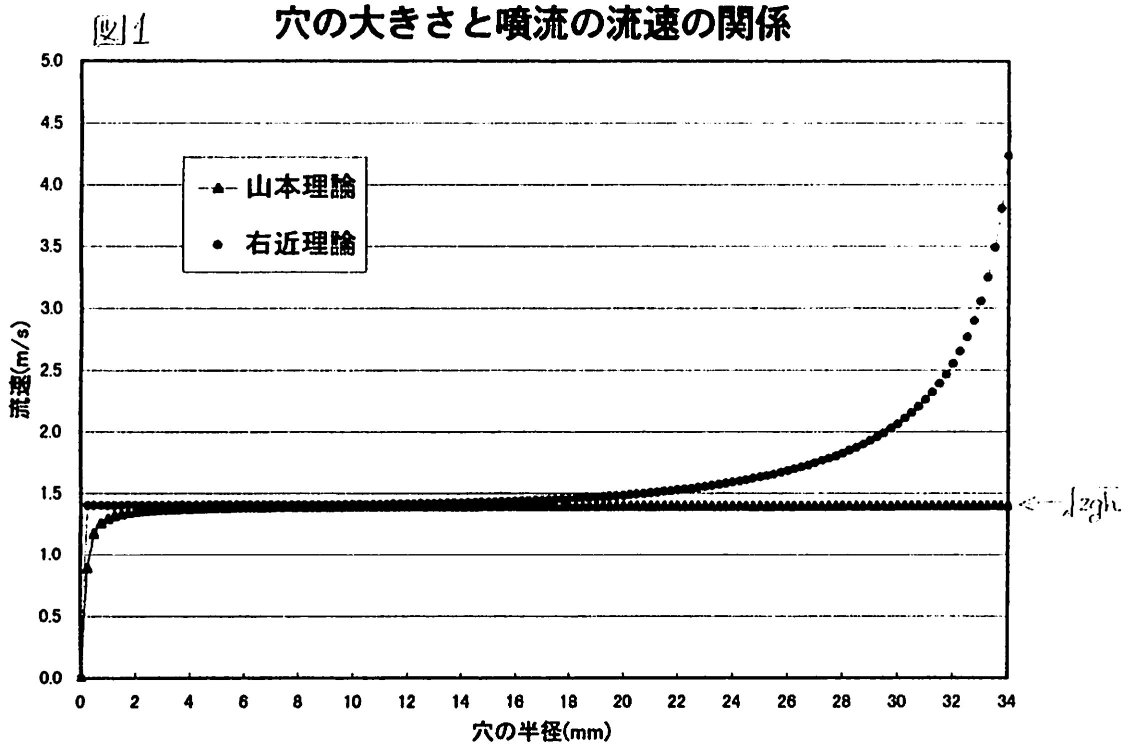

穴の大きさと噴流の流速の関係
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
流速(m/s)
山本理論
右近理論
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34
穴の半径(mm)
←√2gh

図2

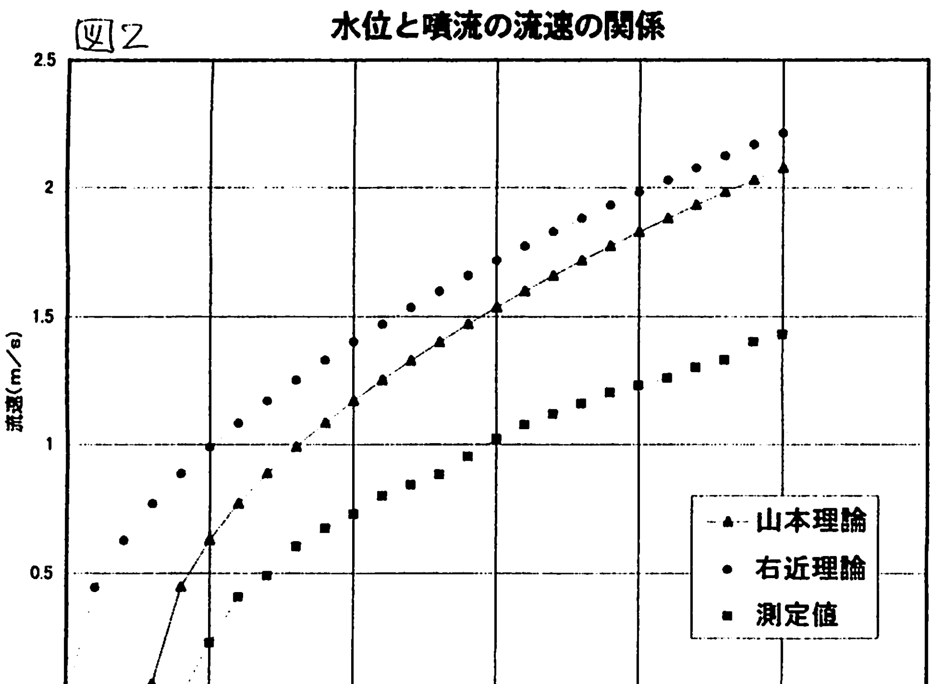

水位と噴流の流速の関係
2.5
2
1.5
1
0.5
0
流速(m／s)
山本理論
右近理論
測定値
0 5 10 15 20 25 30
水位(cm)

図3　水位と噴流の流速の関係（流量係数0.62）

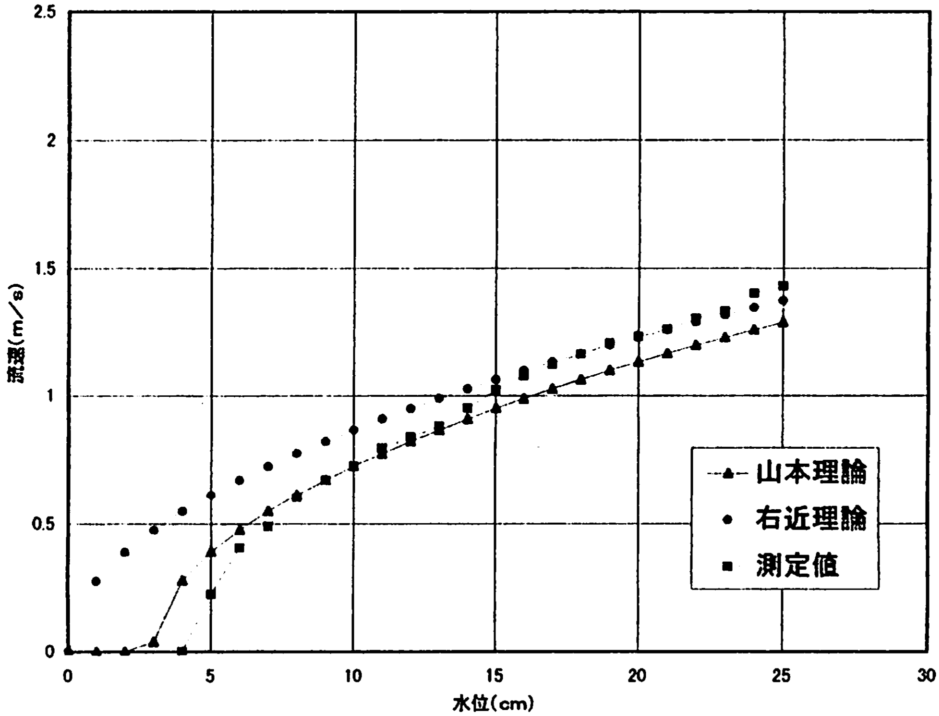


図4　液位と噴流の流速の関係（メタノール）