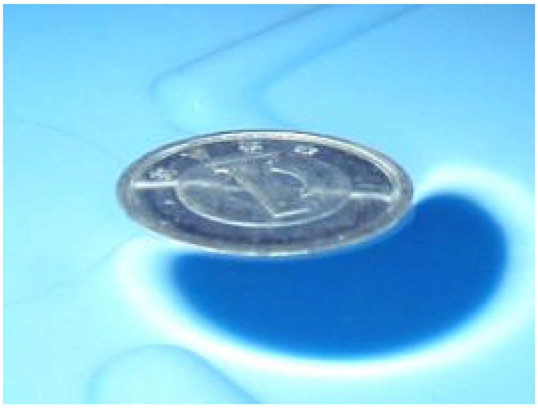
一円玉はなぜ浮かぶ？

神奈川県立湘南台高等学校　山本　明利

水に浮く一円玉

一円玉が水に浮くことは常識でしょう・・・といってもアルミニウムの密度は $2.7\mathrm{g/cm^3}$ ですから、いったん沈んでしまえば浮き上がってくることはありません。しかし、周知のように、表面を濡らさないように注意しながら、そっと水面におけば、一円玉は写真のようにちゃんと浮くのです。



このとき、一円玉の周りでは水面がへこんでいるのが観察されます。一円玉の上の面は実は水面よりも下にあるのですが、なぜか水は一円玉の上には入り込まず、一円玉は沈没を免れます。

この現象はしばしば「水の表面張力で支えられているため」として、水面が一円玉を引っ張り上げているようなニュアンスで説明され、聞く方もそれでなんとなく納得してしまうのですが、本当にそうなのでしょうか。

表面張力とは何か

無重力の自由空間に浮かぶ水が球形になるのは、宇宙時代を迎えた現代ではもはや見慣れた光景です。液体は分子間引力にもとづいて、その表面積をできるだけ小さくしようとする傾向をもちます。このことは、液体表面に沿って一種の張力がはたらくと考えることもできます。表面張力 γ は液体の表面に平行に、液面上の単位長さの線に直角にはたらく応力として表わされ、ＭＫＳ系での単位は[N/m]です。表面張力はまた、液体表面を単位面積だけ増加するときの仕事に等しく、単位面積あたりの自由エネルギーと考えることもできます。表面張力は熱力学的な量なのです。

ここで確認しておきたいことは、表面張力はその名に反して「力」の次元をもつ量ではないということです。表面張力から表面に沿う方向の引っ張りの力を求めるには、考える方向に直角な長さをかけ算しなければなりません。表面張力にさからって表面を拡大する仕事は、表面張力に増加した面積をかけ算して得られます。

ちなみに水の表面張力は理科年表によれば、$\gamma = 7.3 \times 10^{-2}\mathrm{N/m}$（20 ℃）です。これは空気との界面における値で、温度の上昇と共に小さくなる傾向があります。この数値は以下の議論でしばしば用いられますので記憶しておいてください。

表面張力は一円玉をつり上げられるか

一円玉の半径はちょうど 10mm です。一円玉の外周の長さを水の表面張力にかけ算して、一円玉を引き上げる方向に表面張力がどれほどの力を発揮するかを見積もってみると、

$$2\pi r\gamma = 2 \times 3.14 \times 10^{-2} \times 7.3 \times 10^{-2} = 4.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{N} \qquad \cdots\cdots(1)$$

となります。よく観察すると、一円玉と接する水面の傾きは 90 °にはなっておらず、緩やかな傾斜の曲面になっていますから、実際の力はこの半分程度と考えられますが、まずは力のオーダーをおさえておきましょう。

一方、一円玉の質量はちょうど１ｇですから、これにはたらく重力の大きさは、

$$mg = 10^{-3} \times 9.8 = 9.8 \times 10^{-3}\ \mathrm{N} \qquad \cdots\cdots(2)$$

です。(1)の数値の２倍ぐらいですね。

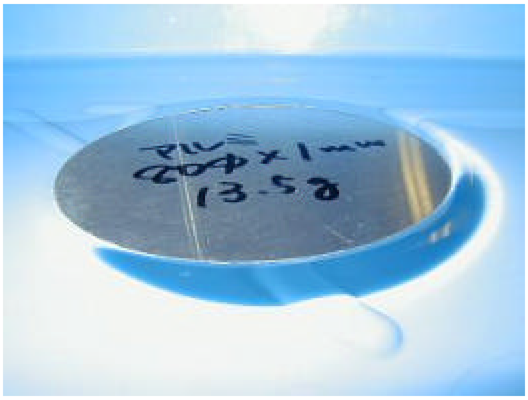
この結果を、「オーダーは合っているじゃないか。」とアバウトに評価する人もいるかもしれませんが、水面が作る曲面の形を考え合わせると、どうもつじつまが合わず、釈然としません。

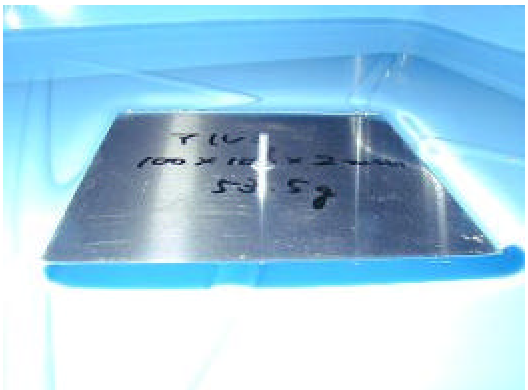
「水とアルミの界面張力は上記の値と異なるはずだ。」という主張もあるかもしれませんが、この場合の一円玉は水をはじいていますので、無理があるでしょう。百歩譲っても、(1)より少しでも大きな力がはたらけば、水の表面は際限なく拡大して、一円玉は水に穴を掘りながら潜っていくことになるでしょう。表面張力は一定であって、弾性力のように引き伸ばせばより強くはたらく性格のものではありません。水面はゴム膜のような弾性は示さないのです。

さらに重い物を浮かべてみる

試みに、一円玉より大きくて重い物を水に浮かべてみましょう。いろいろなサイズのアルミの円盤や四角い板で挑戦してみます。下の写真でご覧いただくように、筆者は 300mm × 200mm × 2mm で 322g もあるアルミ板を浮かべることに成功しました。厚さ 2mm 程度までのアルミ板なら、どんなに大きくても水面に浮かせることができそうです。

【写真の実験データ】
右：直径 80mm × 1mm 厚、質量 13.5g
下：100mm × 100mm × 2mm、
質量 53.5g
右下：300mm × 200mm × 2mm、
質量 322g
いずれもアルミ板





さらに、3mm 以上のアルミ板や、銅や真鍮の板を浮かべることにもチャレンジしましたが、こちらはどうやら無理のようです。これらの実験結果が、現象を解く鍵になりそうです。

浮いたアルミ板についてデータを表にしてみます。「張力」の欄は水の表面張力に板の外周の長さをかけたもので、表面張力が引き上げていると考える場合の力の大きさの目安と思ってください。板が大きく厚くなればなるほど、「張力」と重力の開きは大きくなります。表面張力が重さを支える主要な力になり得ないことは明らかでしょう。

アルミ板の外形	質量 m [g]	外周 L [cm]	張力 γ L [N]	重力 mg [N]
20 φ（一円玉）	1.0	6.3	0.0046	0.0098
30 φ× 1mm	1.9	9.4	0.0069	0.0186
50 φ× 1mm	5.3	15.7	0.0115	0.0519
80 φ× 1mm	13.5	25.1	0.0183	0.1323
100 × 100 × 2mm	53.5	40.0	0.0292	0.5243
300 × 200 × 1mm	159.7	100.0	0.0730	1.5651
300 × 200 × 2mm	322.0	100.0	0.0730	3.1556

水面のへこみに注目

それでは一円玉はどんなしくみで水面に浮いているのかを考察してみましょう。一円玉の周囲では水面がへこんでいます。一円玉全体が平均的な水面より下にあるのです。したがって、一円玉の下面は１気圧よりも大きな水圧を受けていることになります。一円玉の上面は水が浸入していないので、１気圧の大気圧を受けるのみです。この上下の圧力差は上向きの「浮力」となって一円玉にはたらきます。これが一円玉を浮かせているのではないでしょうか。

アルミの密度を ρ、板の厚さを t、水の密度を ρ_0、板の底面までの水深を d で表すことにします。板の面積を S とすると、力のつり合いの式は

$$\rho S t g = \rho_0 S d g \qquad \cdots\cdots(3)$$

となり、以下の式を得ます。

$$\rho t = \rho_0 d \qquad \cdots\cdots(4)$$

これは有名なアイソスタシーの式で、ものが浮くときに水中に沈む深さがここから求められます。普通は浮くものの方が密度が小さいので、$\rho < \rho_0$ で $t > d$ となって頭が水面より上に出るのですが、今は逆です。

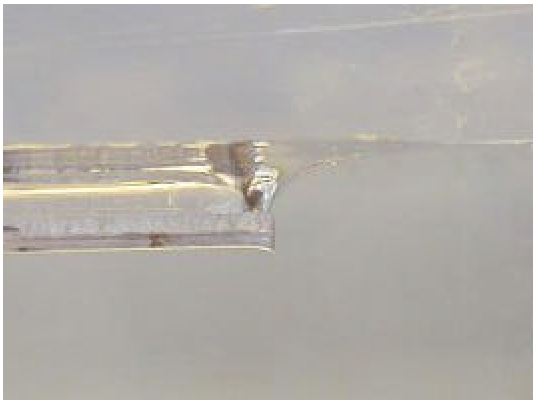
この式の与える結果が妥当かどうか上の実験結果と比較してチェックしてみましょう。$\rho = 2.7\mathrm{g/cm^3}$ とし、一円玉の平均厚みは計算から 1.18mm としました。深さの実測は板の厚みと比較しての目測ですので、精度はありませんが、おおむね妥当な結果が出ています。もちろん深さから計算される水圧を面積とかけて得られる浮力は、上で求めた重力の値とよく一致します。

アルミ板の外形	厚さ t [mm]	計算深さ d [mm]	実測深さ d [mm]
一円玉	1.18	3.18	3.0
厚さ 1mm の板（４種）	1.00	2.70	2.5
厚さ 2mm の板（２種）	2.00	5.40	5.5

表面張力は何をしているのか

結局、一円玉を浮かせていた主要な力は、鉄の船が水に浮くときと同様、水圧と大気圧の差で生じる「浮力」だったことになります。それでは、表面張力は一円玉を浮かべることに寄与していないのでしょうか。

右の写真は 100 × 100 × 2mm のアルミ板を水に浮かべてその角の部分を水平方向からマクロ撮影したものです。アルミ板の厚さ 2mm を目安に目測すると、水面からアルミ板の下面までの深さは前節で示した値になっているのがわかります。



ここでは湾曲した水面に注目してください。水面は深さと共に曲率が増す独特のカーブを形成しています。アルミ板に接するあたりでの曲率半径は 2 ～ 3mm 程度と目測できます。

水面が曲率を持つときは、水面を境に表面張力による圧力差が発生します。円筒形の曲面の場合、その曲率半径を $\boldsymbol{r}$ とすると圧力差 $\boldsymbol{p}$ は、ラプラス・ヤングの式から

$$\boldsymbol{p} = \gamma / \boldsymbol{r} \qquad \cdots\cdots(5)$$

となります。仮に $\boldsymbol{r} = 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$ とすると、

$$\boldsymbol{p} = 7.3 \times 10^{-2} / (2.5 \times 10^{-3}) = 29\,\mathrm{N/m^2} \qquad \cdots\cdots(6)$$

です。一方、アルミ板の上面付近、水深 3.4mm での水圧は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\rho}_0 \boldsymbol{d} \boldsymbol{g} = 10^3 \times 3.4 \times 10^{-3} \times 9.8 = 33\,\mathrm{N/m^2} \qquad \cdots\cdots(7)$$

となり、(6)と大筋で一致します。

つまり、表面張力はアルミ板の縁にできた水面の壁に沿って、ラプラス圧を発生して水圧を支えるはたらきをしているのだと考えられます。アルミ板を支えているのは水圧、水の浸入をくい止めているのが表面張力だったわけです。

浮かぶ限界は？

ここまで考えてくると、限界を求めたくなりますね。きっと密度に応じて決まる、水に浮かぶ限界の厚さが存在するのです。曲面の数学的な形（各部分の曲率が水深に比例した曲面になっている）や、水と板との接触角などを厳密に考慮しようとすると議論が難しくなりそうなので、アバウトにオーダーを求める方法を工夫してみましょう。

上の写真で観察するところでは、限界に近い状態では水面が垂直に近いところまで湾曲し、円筒で近似できそうです。そこで少々乱暴ですが、下の図のように４分の１の円筒形の水面を考え、板の厚さ $\boldsymbol{t}$ と深さ $\boldsymbol{d}$ でその半径が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{t}$ と表せるものと考えましょう。その上でつりあいの条件を満たす $\boldsymbol{t}$ の値を求めればよいのです。

水の密度を $\boldsymbol{\rho}_0$、板の密度を $\boldsymbol{\rho}$ としてアイソスタシーの式(4)を用いると次の関係式を得ます。

$$r = d - t = \frac{\rho}{\rho_0} t - t = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} t \qquad \cdots\cdots(8)$$

さらに、ラプラス圧と深さ r までの間の平均水圧がつり合っているものとみて、

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{1}{2} \rho_0 r g \qquad \cdots\cdots(9)$$

とし、これと式(8)から以下の関係を得ます。

$$r^2 = \frac{2\gamma}{\rho_0 g} = \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} t \right)^2 \qquad \cdots\cdots(10)$$

これを t について解くと

$$t = \frac{1}{\rho - \rho_0} \sqrt{\frac{2\gamma \rho_0}{g}} \qquad \cdots\cdots(11)$$

となります。これが、水より密度の大きい板を浮かべることのできる限界厚みの「目安」を与える式です。円筒近似が乱暴なので、オーダーを見る程度のラフな見積もりになっていることをご承知おきください。

さっそく数値を入れてみましょう。単位に注意して計算します。

アルミニウム	ρ = 2.7g/cm^3	→	t = 2.3mm
銅	ρ = 9.0g/cm^3	→	t = 0.48mm
鉄	ρ = 7.9g/cm^3	→	t = 0.56mm

アルミニウムについては 2mm の厚さの板をやっと浮かせることができたという事実がありますから、上記の計算はおおむね妥当だと評価できます。この結果から、3mm 以上のアルミ板や、十円玉、百円玉が決して浮かばない理由も一応納得できるかと思います。

式(11)の平方根の部分は水に関する定数です。およそ４ kg/m^2 という数値になることを記憶しておくと、上のような見積もりを暗算で行うことができて便利です。

水は隅から攻めてくる

アルミ板の場合、厚さ 1mm のものは楽に浮かせることができますが、限界に近い 2mm のものを浮かべるのは至難の業で熟練を要します。そして丸い板より四角い板の方が難しいのです。

四角い板を浮かせようと試行を繰り返すうちにあることに気がつきます。板が浸水して沈むとき、上面に流れ込んでくる水は必ず隅から攻めてくるのです。浮かべるときは四隅に気を配りながらバランスに注意してゆっくりと下ろしていきます。板の重心に取っ手をつけておくと扱いが楽になります。ところで、水が四角い板の隅から浸入してくるのはどうしてでしょうか。

これまでは鉛直な断面に沿って水面の曲率を考えてきました。ここでは水平面内の曲率を考えてみることにしましょう。四角い板の辺に当たる部分ではこの曲率は当然０ですが、四隅では水面が極めて小さな半径でカーブを描くことになります。この曲面によるラプラス圧はカーブの内側、すなわち板の上の空気がある

方に向かうことになります。
　つまり、四隅では水平面内の曲率による逆向きのラプラス圧がはたらき、水圧を助けるのです。このため四隅は堤防が決壊しやすく、破綻の原因になるというわけです。表面張力は、鉛直方向と水平方向で全く逆のはたらきをしていることになります。
　ラプラス圧は曲面の半径に反比例しますから、四隅での負の作用を軽減するためには曲面のカーブをゆるくすればよいわけです。このため、四角い板では四隅を面取りして丸めると断然浮かせ易くなります。

まとめ
　以上、水より密度の大きいものが水面に浮くという現象を考察してきました。鉄の船が浮力を得て海に浮くことを考えるとそれほど不思議ではないのですが、表面張力によって、水の表面自身が船の舷側の壁に相当する部分を形作っているという点が興味深いと思います。
　限界厚み以下であれば、どんなに大きく重くても水に浮かべることができるという事実には私自身もちょっと驚きました。同時に硬貨の中で一円玉だけが水に浮かべることができるわけが納得できました。
　表面張力という言葉はかなりポピュラーですが、正しい定義や取り扱いは学校では教わらないので、私たち自身、かなりあやふやな概念のまま用いているという点も反省しなければなりません。
　最後に、筆者の数学力不足のため、水面の形を厳密に扱えなかった点は悔やまれます。きっと名のある曲線だと思うので、さらに勉強してみたいと思います。

2002/05/22