ブレンドの公式

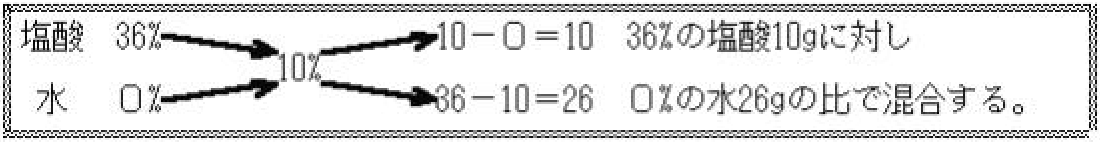
湘南台高校・山本明利

【１】井上さんの問題提起

　２００１年８月のＹＰＣ例会のおり、井上信夫さんがご紹介くださった、「水割りの配合比」の求め方はちょっと興味をひいた。井上さんが提示した例は下記のような問題だった。

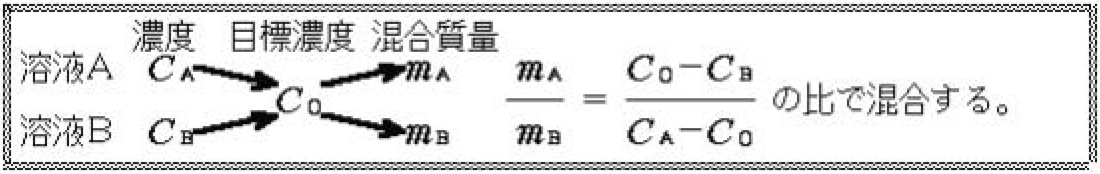
> 濃度 36%の塩酸と水を混合して濃度 10%の塩酸を得たい。どのような比で両者を混合すればよいか。

　これに対する解答が下記のような速算法で得られるというのである。



「たすきがけの引き算」というちょっと珍しい速算法で、例会に居合わせた化学畑の先生がたも初耳とのことだった。しかし、問題を次のように一般化し、落ち着いて考えれば下記のようにして証明でき、正確なものであることがわかる。

> 同じ溶媒・溶質の組み合わせからなる、質量パーセント濃度C_AとC_Bの二つの溶液があり、これらを混合して両者の間の濃度C_0の新たな溶液を得たい。もとの溶液をどのような質量比で混合したらよいか。



【証明】

　溶液Ａの質量m_A中には$C_A/100\times m_A$の溶質が、同様に溶液Ｂの質量m_B中には$C_B/100\times m_B$の溶質が含まれる。これらを混合したときの濃度は質量パーセント濃度の定義にしたがい、次式により求められる。

$$\frac{\dfrac{C_A}{100}\times m_A+\dfrac{C_B}{100}\times m_B}{m_A+m_B}=\frac{C_0}{100}$$

これを解いて

$$C_A m_A+C_B m_B=C_0(m_A+m_B)$$
$$(C_A-C_0)m_A=(C_0-C_B)m_B$$

よって求める混合比は

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{C_0-C_B}{C_A-C_0}$$

となる。

【２】もちろんモル濃度でもＯＫ

濃度は質量パーセント濃度である必然性はない。上記の速算法は、モル濃度を用いても問題なく適用できる。質量を体積に読み替えるだけである。

> 同じ溶媒・溶質の組み合わせからなる、モル濃度 c_A と c_B の二つの溶液があり、これらを混合して両者の間の濃度 c_0 の新たな溶液を得たい。もとの溶液をどのような体積比で混合したらよいか。

	濃度	目標濃度	混合体積	
溶液A	c_A	c_0	V_A	$\dfrac{V_A}{V_B}=\dfrac{c_0-c_B}{c_A-c_0}$ の比で混合する。
溶液B	c_B		V_B	

【証明】

溶液Aの体積 V_A 中には物質量 c_AV_A の溶質が、同様に溶液Bの体積 V_B 中には物質量 c_BV_B の溶質が含まれる。これらを混合したときの濃度はモル濃度の定義にしたがい、次式により求められる。

$$\frac{c_AV_A+c_BV_B}{V_A+V_B}=c_0$$

これを解いて

$$c_AV_A+c_BV_B=c_0(V_A+V_B)$$
$$(c_A-c_0)V_A=(c_0-c_B)V_B$$

よって求める混合比は下のようになる。

$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{c_0-c_B}{c_A-c_0}$$

【３】実は密度だっていいのだ

もうお気づきのように、この速算法の適用範囲は濃度にとどまらない。同じ数学的構造をもつあらゆる量について、それらの混合比を求めることに応用できる。例えば、【２】のモル濃度を密度に読み替えれば、次のような問題が解ける。

> 密度 ρ_A と ρ_B の二つの粉体がありこれらを物理的に混合して両者の間の密度 ρ_0 の新たな粉体を得たい。どのような体積比で混合したらよいか。ただし、混合によって両者の体積の和は変わらないものとする。

密度　目標密度　混合体積

粉体A　$\rho_A \rightarrow \rho_0 \rightarrow V_A$

粉体B　$\rho_B \rightarrow \rho_0 \rightarrow V_B$

$\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\rho_0 - \rho_B}{\rho_A - \rho_0}$ の比で混合する。

【証明】

粉体Aの体積V_A中には質量$\rho_A V_A$の物質が、同様に粉体Bの体積V_B中には質量$\rho_B V_B$の物質が含まれる。これらを混合したときの密度は定義にしたがい、

$$\frac{\rho_A V_A + \rho_B V_B}{V_A + V_B} = \rho_0$$

で求められる。これを解いて

$$\rho_A V_A + \rho_B V_B = \rho_0 (V_A + V_B)$$
$$(\rho_A - \rho_0) V_A = (\rho_0 - \rho_B) V_B$$

よって求める混合比は

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\rho_0 - \rho_B}{\rho_A - \rho_0}$$

となる。

【４】熱量計算でも同じことだ

この計算法は熱量計算でも使える。次のような問題を解いてみよう。

温度t_Aとt_Bの二つの同種の液体があり、これらを物理的に混合して両者の間の温度t_0の液体を得たい。どのような体積比で混合したらよいか。ただし、液体の比熱や密度は温度によって変化しないものとする。

温度　目標温度　混合体積

液体A　$t_A \rightarrow t_0 \rightarrow V_A$

液体B　$t_B \rightarrow t_0 \rightarrow V_B$

$\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{t_0 - t_B}{t_A - t_0}$ の比で混合する。

【証明】

この液体の比熱をｃ、密度をρとすると、熱量保存の法則の式は次のように書ける。ここで、$t_A > t_0 > t_B$と考える。

$$c\rho V_A (t_A - t_0) = c\rho V_B (t_0 - t_B)$$

これを解いて、求める混合比は

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{t_0 - t_B}{t_A - t_0}$$

となる。体積Ｖを熱容量と読み替えれば、反応熱・混合熱を伴わない異種の液体の混合にも応用できる。

【３】の密度の例と比較すると、温度が密度に、熱容量が体積に対応している

ことがわかる。上の式は次のように書き替えることができるが、

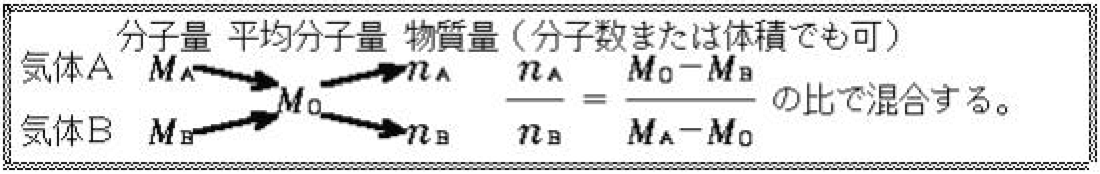
$$t_A V_A + t_B V_B = t_0 (V_A + V_B)$$

この式は、温度を「熱素の密度」であると考え、ｔＶが物体の持つ「熱素の量」であると考えれば密度計算と同じ構造であることが了解できる。熱素説は熱量計算の範囲では、エネルギー説と互角にわたりあうことができる。

【５】平均分子量や原子量の計算でもＯＫ

要するにこの「たすきがけの引き算」という計算法は、二つの量を重みつきで按分するという計算に広く使える。例えば、各成分気体の分子量と混合気体の平均分子量がわかっているときに混合比を求めたり、同位体の各原子の相対質量とその平均値としての原子量がわかっていて存在比を求めたりする計算である。前者の例を見てみよう。

分子量M_AとM_Bの二つの気体があり、これらを物理的に混合して得られた気体の平均分子量はM_0であった。成分気体Ａ，Ｂの混合比を求めよ。



【証明】

気体Ａの物質量n_Aに相当する質量は$M_A n_A$であり、同様に気体Ｂの物質量n_Bに相当する質量は$M_B n_B$である。これらを混合したときの平均分子量は、全質量を物質量の和で割って得られる。

$$\frac{M_A n_A + M_B n_B}{n_A + n_B} = M_0$$

これを解いて

$$M_A n_A + M_B n_B = M_0 (n_A + n_B)$$
$$(M_A - M_0) n_A = (M_0 - M_B) n_B$$

よって求める混合比は

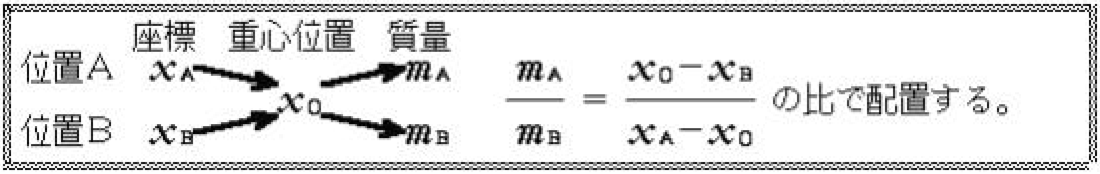
$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{M_0 - M_B}{M_A - M_0}$$

となる。Ｍを原子の相対質量、ｎを存在比と見れば、原子量の計算も同様である。

【６】重心へも応用できる

式の形の連想から、さらに重心を求める計算に適用してみる。重心というのはもともと質量分布の中心、すなわち重みつき平均を求める計算だから、構造は同じなのだ。

x軸上の座標x_Aとx_Bにそれぞれ、質量m_Aとm_Bを配置して、それらの重心が両者の間の座標x_0にくるようにしたい。質量m_Aとm_Bの比をどのように決めたらよいか。



【証明】

座標x_Aに質量m_Aが、座標x_Bに質量m_Bがあるときの重心の座標x_0は

$$\frac{x_A m_A + x_B m_B}{m_A + m_B} = x_0$$

である。これを解いて

$$x_A m_A + x_B m_B = x_0 (m_A + m_B)$$
$$(x_A - x_0)\, m_A = (x_0 - x_B)\, m_B \cdots\cdots ★$$

よって求める質量比は

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{x_0 - x_B}{x_A - x_0}$$

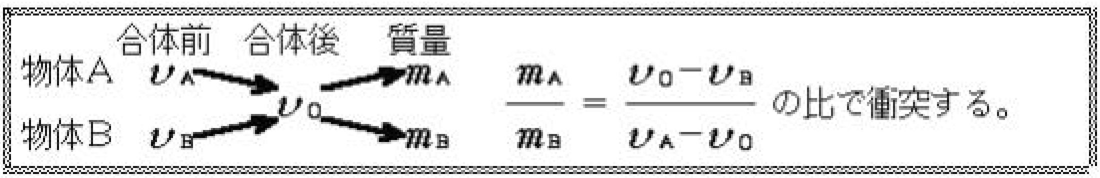
となる。

結論の一歩手前の式★を見ればわかるように、これはモーメントのつりあいの条件である。いわば自明の結論であるが、この形に持ち込まれる計算はかなり多い。したがって、話題の速算法は力学的な計算でもけっこうあちこちで応用できる可能性がある。

【７】衝突問題にだって使えるぞ

キリがないのでこのへんでやめるが、最後にもうひとつ強引に物理への応用例を示して終わりにする。上のように重心の計算に使えるなら当然、運動量保存の法則で解く衝突の問題にも使えるはずだ。運動量保存は重心一定の微分形だからだ。

x軸上を速度v_Aとv_Bで運動する質量m_Aとm_Bの物体が衝突して一体になったのち、速度v_0で進んだ。質量m_Aとm_Bの比を求めよ。



【証明】
質量m_Aが速度v_A、質量m_Bが速度v_Bで衝突して合体し、速度v_0となるときの運動量保存の法則は下記のように書ける。

$$v_A m_A + v_B m_B = v_0 (m_A + m_B)$$

ここでは、これまでの話の流れから、mとvを通常と逆順に表記している。上式を解いて

$$(v_A - v_0) m_A = (v_0 - v_B) m_B$$

よって求める質量比は

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{v_0 - v_B}{v_A - v_0}$$

となる。

【８】天秤算とよぶのだそうだ

というわけで､ブレンド比を求めるこの速算法は結構奥が深いことがわかった。９月のＹＰＣの例会で、三浦高校数学科の車田さんに教わったところによると、このような計算は受験数学の世界では「天秤算」と呼ばれていて、かなりポピュラーなのだそうだ。【６】の重心の例は、力のモーメントのつり合いの計算だから、まさに「天秤算」である。

しかし、小学生では、私立中学校を受験しようとする秀才といえども、この小論のような理解に達しているとは思えないから、パターン解法の技術として身に付けるのだろう。しかし、われわれは単なる受験技術や機械的速算法として片付けないで、その意味を探ってみると意義深いのではあるまいか。

以上の例にとどまらず、このような構造で計算される事例をもっと集めてみると、新たな視点が得られて面白いかもしれない。皆さんも探してみてはいかが。