

ドップラー効果の式に関する視点

湘南台高校・山本明利

ドップラー効果の式といえば、ほとんどの教科書や参考書が判で押したように

$$f_o = \frac{V - v_o}{V - v_s} f_s \quad \dots\dots(1)$$

という公式を掲げています。もちろんここに V は音速、添字 O は観測者、 S は音源を意味し、 v はそれぞれの速度、 f は振動数です。蛇足ながら、本によっては S から O に向かう向きを正にとれなどと指示してあるものを見かけますが、これは邪道で、音速も含めてすべての速度を同じ座標軸のもとで符合付きで表せば、この式はあらゆる場合を尽くしています。

ところで、生徒はよく(1)式を丸暗記しようとして分子分母を取り違えるので、私は意識的に次のように書き替えて授業をしています。

$$\frac{f_o}{f_s} = \frac{V - v_o}{V - v_s} \quad \dots\dots(2)$$

この形ですと、対称性がよいので記憶しやすく、仮に「 O はONGENだったかな？」などと上下を取り違えても正解が得られますので試験対策としては有効です。でも「試験のための物理」ではちょっと悲しいので、もう少し掘り下げてみることにします。式(2)をさらに変形して、

$$\frac{V - v_s}{f_s} = \frac{V - v_o}{f_o} \quad \dots\dots(3)$$

としてみると新しい視点が見えてきます。 $V - v$ は音源や観測者に対する音の相対速度(相対音速)を意味しますから、式(3)は言葉で書けば、

$$\frac{\text{音源から見た相対音速}}{\text{音源の振動数}} = \frac{\text{観測者からみた相対音速}}{\text{観測者が受け取る振動数}} \quad \dots\dots(4)$$

ということで、波の基本式 $V = f\lambda$ を思い起こせば、上式は「音源から見ても観測者から見ても波長は同じである。」と述べていることになります。

つまり、音源から見ると音波は1秒間に $V - v_s$ の距離を進みますが、その間に f_s 個の波が発せられるので、音源からは $V - v_s / f_s$ という波長の波が進んでいくのが見え、一方の観測者は1秒間に $V - v_o$ という長さの内に含まれる f_o 個の波を受け取るので、観測者から見ると $V - v_o / f_o$ という波長の波がやって来るように見えるわけですが、相対論的效果を考えなければ、運動していても長さの変化はないので、この波長は両者にとっての不変量でなければならないわけです。

言うまでもなくドップラー効果は「波源や観測者の運動の結果、観測者が観測する波の振動数が波源が発するそれと差を生じる現象」なのですが、これを波源→観測者という座標系の乗りかえ(ガリレイ変換)に伴う物理量の変化と考え、この変換の中では「長さ」すなわち「波長」は不変量だという視点に立って式(3)を導くのもすっきりしていいかなと思います。すなわち、

「波長は波源、観測者の両者にとって共通なので、それぞれの立場で $\lambda = V / f$ を求めて等しいと置けば式(3)を得る。」

証明はこれだけでいいんですね。