

打上花火の方程式

湘南台高校・山本明利

今年6月に【理科の部屋】で話題になった花火と放物運動の話題をまとめておきます。本当は言い出しっぺの鶴沼さんが書くべきだと思うのですが・・・(^)。コメントツリーの先頭は

11692 BYR10040 鶴沼 放物運動の1例 96/06/15 22:42

です。もちろんログはもう書庫入りしています。

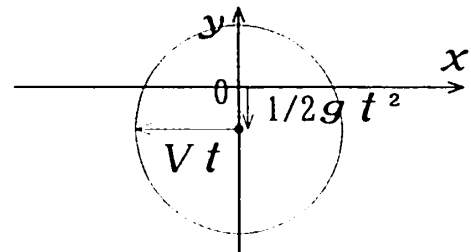
さて、大輪の打上花火は、打ち上げ後最高点付近で「割薬」という火薬によって本体を炸裂させ、「星」と呼ばれる発光火薬を四方に散逸させます。これが輝きながら花状に開くのが花火というわけです。発色はもちろん炎色反応によります。これをグレーティングスクリーンを通してみると花火が7倍楽しめるのですが、その話はおいといて・・・

「星」はきれいに球形に広がるように見えます。一つ一つは放物線を描いているはずなのになぜ球形が崩れないのか不思議な気がします。そこで、次のような問題を考えることにします。同様の趣旨の入試問題がかつて見た記憶があります。

Ⓔ 原点から等しい速さ V で、四方八方へ一斉に投げ出された無数の質点はどうのような軌跡を描き、全体としてどのような運動をするか。それらが通過する領域はどうのような空間図形を作るか。

空気抵抗は考えず、重力のみが作用するとすれば、各質点の時刻 t における座標はどの物理教科書にも載っているように

$$x = V \cos \theta \cdot t$$
$$y = V \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$



です。これらから θ を消去すると

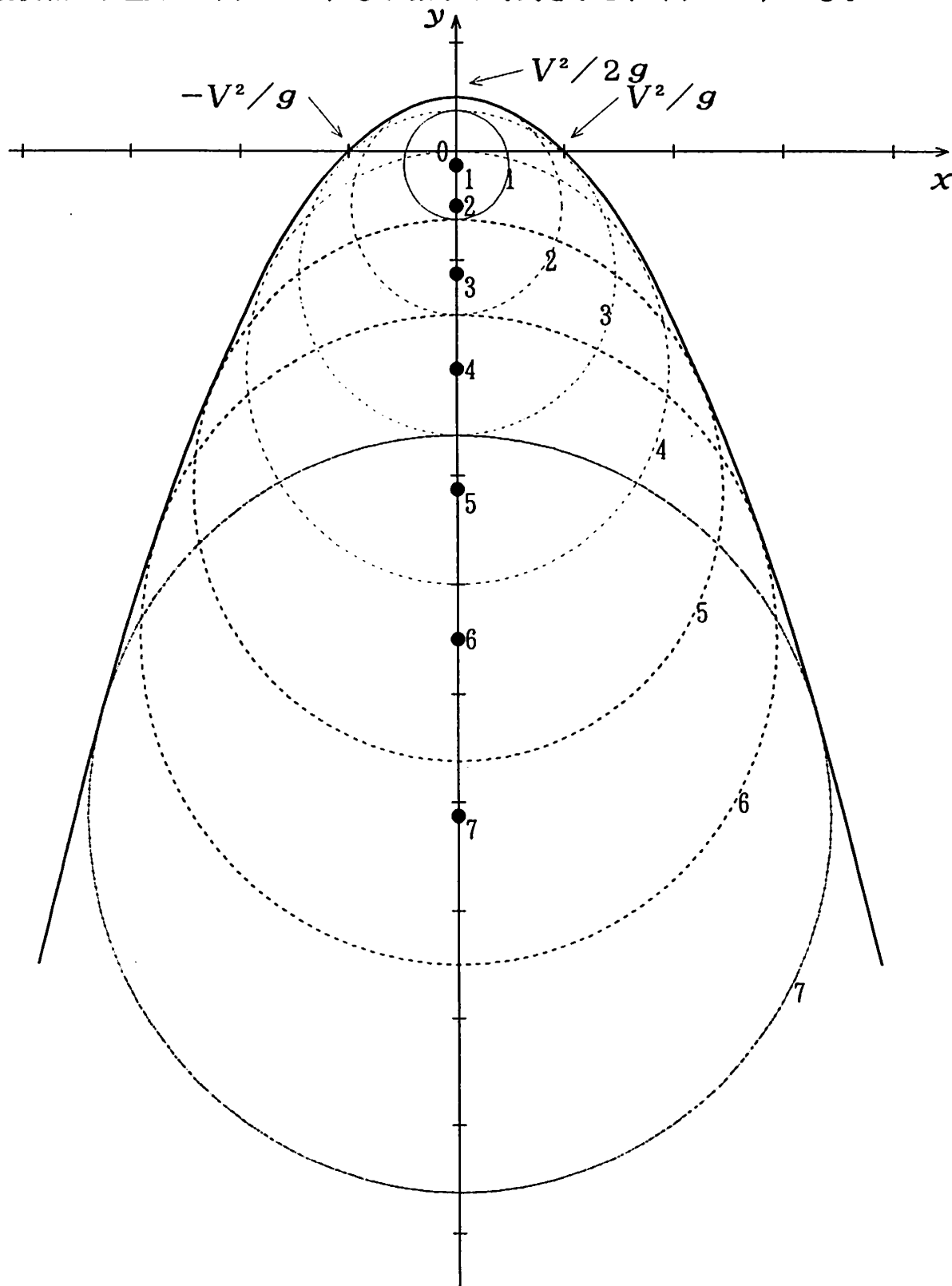
$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 = (V t)^2 \quad \dots\dots(1)$$

となります。つまりこれは半径が $V t$ で中心の座標が $(0, -1/2 \cdot g t^2)$ であるような円の方程式（実際には球）です。等速で広がりつつ自由落下する球というわけです。

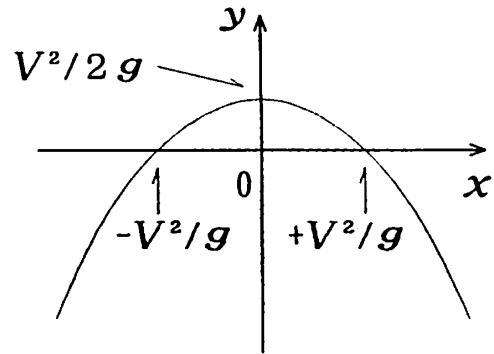
あらゆる放物運動は、重力がない場合の初速度のみによる等速直線運動と、初速度 0 で重力のみによって起こる自由落下運動の合成として説明できることを思い出すと、重力がない場合は無数の質点は原点を中心に一定の速さ V で広がる球面を構成していますから、実際の運動はこれら球面をなす質点群をを一斉に自由落下させたものになるわけです。これが「花火の運動」です。

さらに式(1)を t^2 についての二次方程式と見て、実根条件すなわち現実起こりうるための条件を作ると、判別式より最終的に

空気抵抗がない場合の「等速で広がる球体の自由落下」のようす
 縦横軸の目盛りの単位は V^2/g 、数字は時刻を示し、単位は $V/2g$ 。



$$y \leq -\frac{g}{2V^2} \cdot x^2 + \frac{V^2}{2g} \quad \dots\dots(2)$$



を得ます。これは頂点が

$$y = \frac{V^2}{2g} \quad (\text{※鉛直投射の最高到達高度})$$

にあり、 x 軸との交点が

$$x = \pm \frac{V^2}{g} \quad (\text{※斜方投射の最大水平到達距離})$$

であるような上に凸な放物線（実際には回転放物面）の内部にあたります。
この曲面は、先の落下する球体の包絡面になっており、投げられた物体はその外部には決して出ることはできません。放物体を標的に当てようとする場合、標的がこの回転放物面の傘の内部になれば、どんな角度に放ってみても決して届くことはないのです。

さて、しだれ柳の花火の曲面はまさにこの領域を示すものだと考えられます。しだれ柳の「星」の火薬は四散する時に燃えながら軌跡を残すようになっているのでしょう。さらに、「しだれ」させて滞空時間を伸ばすために、しだれ柳の「星」にはそれぞれパラシュートがついているのだという情報も【理科の部屋】に寄せられました。パラシュートがなくても、「星」はいずれ空気抵抗により放物線を外れることとなります。したがって実際には、上記の回転放物面の裾の方は円筒になるのです。その円筒の半径はどのようにして決まるのでしょうか。また空気抵抗によって球形はゆがまないのでしょうか。

速度に比例する空気抵抗がある場合、各質点の時刻 t における座標は、空気抵抗抗力を kmv として（一般の空気抵抗係数を m で割ったものを k としました）

$$x = \frac{V \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$y = -\frac{g}{k} t + \frac{1}{k} (V \sin \theta + \frac{g}{k}) (1 - e^{-kt})$$

となります。 $E = 1 - e^{-kt}$ とおいて式を整理すると、

$$x = \frac{VE}{k} \cos \theta$$

$$y - \frac{g}{k^2} E + \frac{g}{k} t = \frac{VE}{k} \sin \theta$$

となり、これより θ を消去すると、

$$x^2 + \left\{ y + \left(\frac{g}{k} t - \frac{g}{k^2} E \right) \right\}^2 = \left(\frac{VE}{k} \right)^2 \quad \dots\dots(3)$$

を得ます。

これは空気抵抗がない場合の式(1)に相当するものです。やはりY軸上を落下する円(球)の方程式になっていることがわかります。つまり、空気抵抗があっても花火の形は崩れないのです。

式(3)のパラメータEは時間の経過につれ0→1となるので、球の半径はV/kより広がることはありません。これが上で述べた回転放物面の裾の円筒の半径です。初速度Vで水平投射した放物体が最も遠くまで達しますが、そのx座標はV/kに漸近します。球の中心のY座標は十分時間が経つと、よく知られている終端速度g/kで落下することになります。

参考文献：「力学・改訂版」原島鮮著（裳華房）
Nifty Serve【理科の部屋】関連ログ

東急東横線日吉駅前に「名所できた！」

横浜市港北区の東急東横線日吉駅前の自由通路にある直径二・二メートル、ステンレス製の球形モニュメント「銀球自像」(ごぎゅうじざう)が、「銀の球」のニックネームで新しい待ち合わせスポットになっている。ぴかぴかのくぼみに反射した光で、近くに立っていた人の服が焦げる四カ月前の騒ぎで、今ではくぼみをいぶし銀のよきにして、予想外の「事故」の再発を防いでいる。

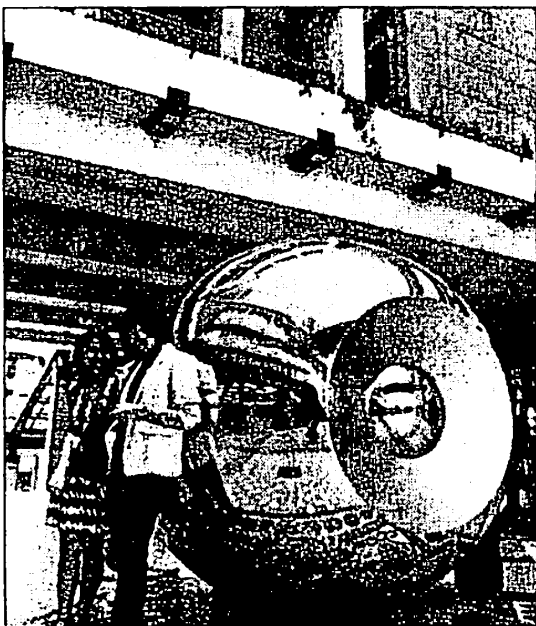
新デートスポットに「銀の球」が人気です

8/30 朝日 神奈川版

「銀の球」は昨春秋にお目見えした。鏡面仕上げで、所々にある穴は向こう側をのぞいたり手を入れたりできて、香木入りのいい香りがする穴もある。駅前にキャンパスがある慶応義塾大経済学部一年、若海俊之さん(20)は「待ち合わせは『銀玉集合ね』で決めたりします」。ここで待ち合わせ中の同大文学部三年、等本彩さん(20)は「穴の向こう側の友達と話したり、楽しく待ち時間はすぐ過ぎる」。

穴に手を入れたりのぞいたりして遊んでいた港北区日吉本町二丁目の酒井伶奈ちゃん(20)、弟の暁ちゃん(20)の母親の美奈子さん(20)は「この銀の球が大好きで、なかなか離れないんだよ」。

鏡面仕上げで香木入り



待ち合わせに人気のモニュメント。女性の右側の、いぶし銀のようにになっているくぼみ部分の反射光で「事故」が起きた＝東急東横線日吉駅前

「玉にキズ」は太陽光反射騒ぎ

小さな「事故」があった。前に立っていた二人の大学生のは、今年四月二十一日生のナイロン製ウィンドブロー。東急電鉄などの話によると、「銀の球」の東側のスポンが約二センチ焦げた。けう。

がはなく、「犯人」は銀の球で反射した太陽光だった。球には一方所の皿状のくぼみがある。くぼみで反射した太陽光が、偶然二人の服のところで焦点を結び、焦げたりしい。この後、くぼみの一つをいぶし銀のように加工した。作者の静岡県熱海市在住の彫刻家三浦寛司さん(50)は「ステンレス製の作品を磨く場合は、太陽光の向きや角度などをすべて計算している。屋根付きの所にある銀球自像に、時期によって東の低い位置から光が差し込むことは予測できたが、そんなことになるとは思わなかった」という。