学生読み物　　**ガリレオの定理**　斜面を下る物体は円をなす

柏陽高校・山本明利

水平から角度θ傾いた斜面を摩擦なく下る質点は、斜面方向に $a = g\sin\theta$ という一定の加速度で等加速度運動を行います。出発点を原点とし、水平方向に x 軸、鉛直下方に y 軸をとると、質点の加速度の x, y 成分はそれぞれ

$$a_x = g\sin\theta\cos\theta \qquad a_y = g\sin^2\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

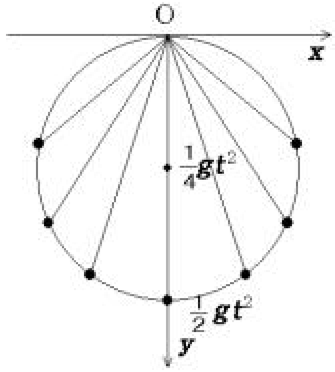
となります。初速度０の場合、t 秒後の位置座標は

$$x = g/2\cdot\sin\theta\cos\theta\cdot t^2 \qquad y = g/2\cdot\sin^2\theta\cdot t^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

で与えられます。

いま、原点から下る、様々な傾きをもつたくさんの斜面が放射状にあって、そのそれぞれに沿って、一つずつの質点が一斉に滑り下るものとします。任意の時刻におけるこれらの質点の分布はどうなっているのでしょう。もちろん、鉛直下方に向かって自由落下する質点が最も速く進みますが、他の点はどういう進み方をするのでしょう。

式②の両式から、時刻 t を消去するために、それぞれを２乗して加えます。



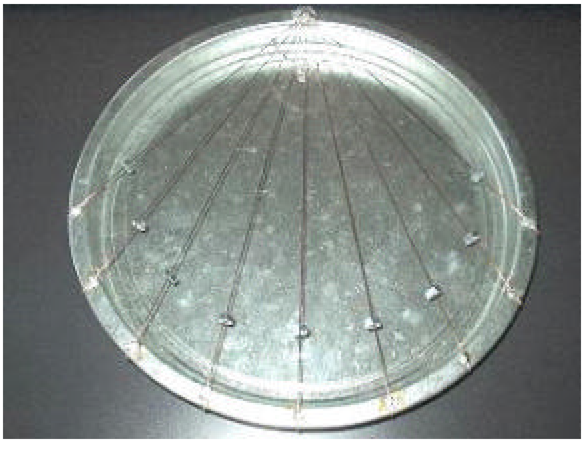
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= g^2t^4/4\ (\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta) \\ &= g^2t^4/4\cdot\sin^2\theta\ (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= g^2t^4/4\cdot\sin^2\theta \\ &= gt^2/2\cdot y \end{aligned}$$

この式はさらに次のように変形できます。

$$x^2 + (y - gt^2/4)^2 = (gt^2/4)^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

式③は、座標（０，$gt^2/4$）に中心を持つ、半径が $gt^2/4$の円の方程式ですから、全ての質点は、どの時刻にも、原点と、鉛直自由落下する点を結ぶ線分を直径に持つような円周上にあるということになります。

別の言い方をすると、鉛直面内の円の頂上から放射状に多数の弦を引き、それぞれの弦に沿って、頂点から一斉に質点を滑らせるとき、全ての点は同時に反対側の円周に達するというわけです。



この面白い性質は、１７世紀のガリレオ・ガリレイによってすでに見いだされていました。そこでこの小論の見出しは「ガリレオの定理」としました。

試みに、百円ショップで購入した金属の丸いお盆に、ナットを通した金属線を弦のように張り渡し、写真のような実験器具を作ってみました。頂点近くからナットを一斉に滑らせると、全てのナットがほぼ同時に向かい側の壁を打つ音が聞こえます。ガリレオは正しかったのです。

【参考文献】戸田盛和「いまさら一般力学？」丸善、1996
ガリレオ・ガリレイ「新科学対話」岩波文庫、1971