打上花火の方程式

湘南台高校・山本明利

今年６月に【理科の部屋】で話題になった花火と放物運動の話題をまとめておきます。本当は言い出しっぺの鵠沼さんが書くべきだと思うのですが・・・(^^)。コメントツリーの先頭は

11692 BYR10040　鵠沼　放物運動の１例　96/06/15 22:42

です。もちろんログはもう書庫入りしています。

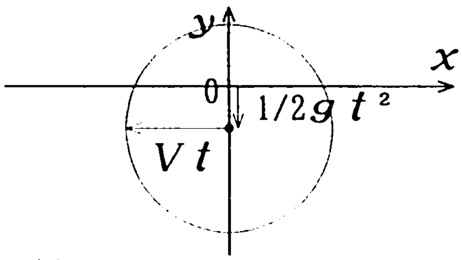
さて、大輪の打上花火は、打ち上げ後最高点付近で「割薬」という火薬によって本体を炸裂させ、「星」と呼ばれる発光火薬を四方に散逸させます。これが輝きながら花状に開くのが花火というわけです。発色はもちろん炎色反応によります。これをグレーティングスクリーンを通してみると花火が７倍楽しめるのですが、その話はおいといて・・・

「星」はきれいに球形に広がるように見えます。一つ一つは放物線を描いているはずなのになぜ球形が崩れないのか不思議な気もします。そこで、次のような問題を考えてみることにします。同様の趣旨の入試問題をかつて見た記憶があります。

> 問 原点から等しい速さVで、四方八方へ一斉に投げ出された無数の質点はどのような軌跡を描き、全体としてどのような運動をするか。それらが通過する領域はどのような空間図形を作るか。

空気抵抗は考えず、重力のみが作用するとすれば、各質点の時刻tにおける座標はどの物理教科書にも載っているように

$$x = V\cos\theta \cdot t$$
$$y = V\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$



です。これらからθを消去すると

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 = (Vt)^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

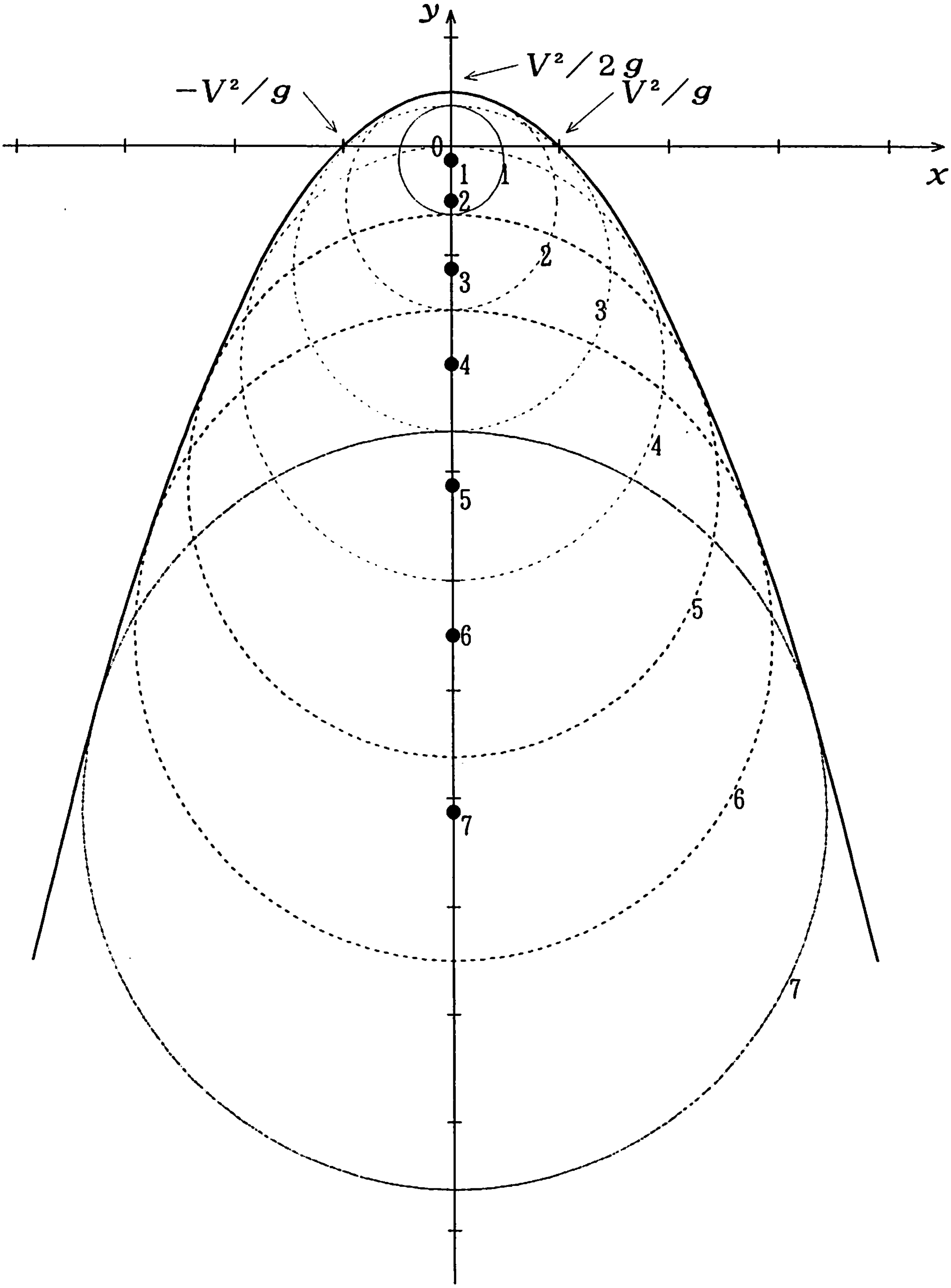
となります。つまりこれは半径がVtで中心の座標が$(0,\ -1/2 \cdot g t^2)$であるような円の方程式（実際には球）です。等速で広がりつつ自由落下する球というわけです。

あらゆる放物運動は、重力がない場合の初速度のみによる等速直線運動と、初速度０で重力のみによって起こる自由落下運動の合成として説明できることを思い出すと、重力がない場合は無数の質点は原点を中心に一定の速さVで広がる球面を構成していますから、実際の運動はこれら球面をなす質点群をを一斉に自由落下させたものになるわけです。これが「花火の運動」です。

さらに式(1)をt^2についての二次方程式と見て、実根条件すなわち現実に起こりうるための条件を作ると、判別式より最終的に

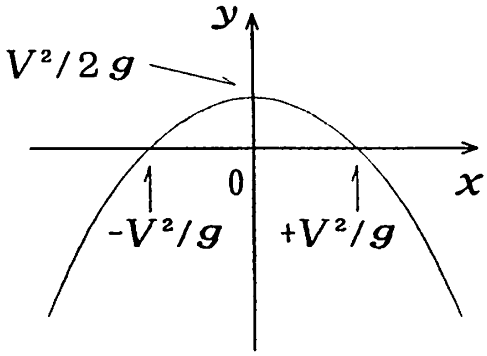
空気抵抗がない場合の「等速で広がる球体の自由落下」のようす

縦横軸の目盛りの単位はV^2/g、数字は時刻を示し、単位は$V/2g$。



YPC103

$$y \leqq -\frac{g}{2V^2}\cdot x^2 + \frac{V^2}{2g} \qquad \cdots\cdots(2)$$



を得ます。これは頂点が

$$y = \frac{V^2}{2g} \quad \text{（※鉛直投射の最高到達高度）}$$

にあり、x軸との交点が

$$x = \pm\frac{V^2}{g} \quad \text{（※斜方投射の最大水平到達距離）}$$

であるような上に凸な放物線（実際には回転放物面）の内部にあたります。
　この曲面は、先の落下する球体の包絡面になっており、投げられた物体はその外部には決して出ることはできません。放物体を標的に当てようとする場合、標的がこの回転放物面の傘の内部になければ、どんな角度に放ってみても決して届くことはないのです。

　さて、しだれ柳の花火の曲面はまさにこの領域を示すものだと考えられます。しだれ柳の「星」の火薬は四散する時に燃えながら軌跡を残すようになっているのでしょう。さらに、「しだれ」させて滞空時間を伸ばすために、しだれ柳の「星」にはそれぞれパラシュートがついているのだという情報も【理科の部屋】に寄せられました。パラシュートがなくても、「星」はいずれ空気抵抗により放物線を外れることになります。したがって実際には、上記の回転放物面の裾の方は円筒になるのです。その円筒の半径はどのようにして決まるでしょうか。また空気抵抗によって球形はゆがまないものでしょうか。

　速度に比例する空気抵抗がある場合、各質点の時刻tにおける座標は、空気抵抗力をkmvとして（一般の空気抵抗係数をmで割ったものをkとしました）

$$x = \frac{V\cos\theta}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$
$$y = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(V\sin\theta + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right)$$

となります。$E = 1 - e^{-kt}$とおいて式を整理すると、

$$x = \frac{VE}{k}\cos\theta$$
$$y - \frac{g}{k^2}E + \frac{g}{k}t = \frac{VE}{k}\sin\theta$$

となり、これよりθを消去すると、

$$x^2 + \left\{y + \left(\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}E\right)\right\}^2 = \left(\frac{VE}{k}\right)^2 \qquad \cdots\cdots(3)$$

を得ます。

YPC103

これは空気抵抗がない場合の式(1)に相当するものです。やはりy軸上を落下する円（球）の方程式になっていることがわかります。つまり、空気抵抗があっても花火の形は崩れないのです。

式(3)のパラメータEは時間の経過につれ$0 \to 1$となるので、球の半径はV/kより広がることはありません。これが上で述べた回転放物面の裾の円筒の半径です。初速度Vで水平投射した放物体が最も遠くまで達しますが、そのx座標はV/kに漸近します。球の中心のy座標は十分時間が経つと、よく知られている終端速度g/kで落下することになります。

参考文献：「力学・改訂版」原島鮮著（裳華房）
Nifty Serve【理科の部屋】関連ログ

東急東横線日吉駅前に「名所できた!」

新デートスポットに「銀の球」が人気です

横浜市港北区の東急東横線日吉駅前の自由通路にある直径二・二㍍、ステンレス製の球形モニュメント「虚球自像」（こきゅうじぞう）が、「銀の球」のニックネームで新しい待ち合わせスポットになっている。ぴかぴかのくぼみに反射した光で、近くに立っていた人の服が焦げる四カ月前の騒ぎで、今ではくぼみをいぶし銀のようにして、予想外の「事故」の再発を防いでいる。

8/30 朝日 神奈川版

「玉にキズ」は太陽光反射騒ぎ

小さな「事故」があったのは、今年四月二十一日朝。東急電鉄などの話によると、「銀の球」の東側の前に立っていた二人の大学生のナイロン製ウインドブレーカーのポケット部分とズボンが約二㌢焦げた。けがはなく、「犯人」は銀の球で反射した太陽光だった。球には二カ所の皿状のくぼみがある。くぼみで反射した太陽光が、偶然二人の服のところで焦点を結び、焦げたらしい。この後、くぼみの一つをいぶし銀のように加工した。

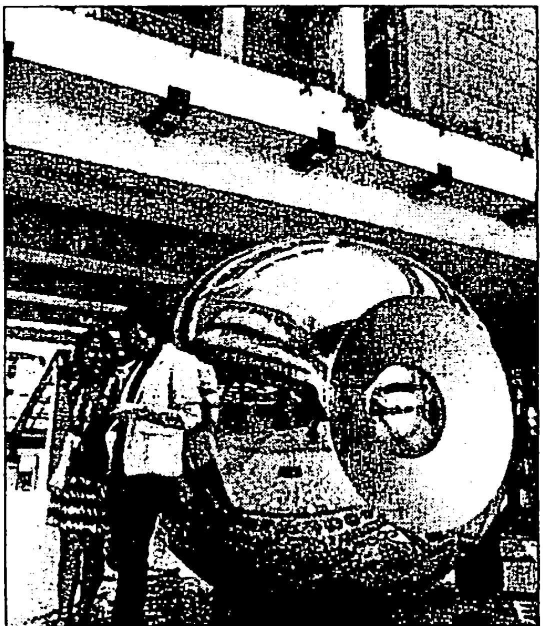
作者の静岡県熱海市在住の彫刻家三澤憲司さん(五〇)は「ステンレス製の作品を置く場合は、太陽光の向きや角度などをすべて計算している。屋根付きの所にある虚球自像に、時期によって東の低い位置から光が差し込むことは予測できたが、そんなことになるとは思わなかった」という。

鏡面仕上げで香木入り

「銀の球」は昨年秋にお目見えした。鏡面仕上げで、所々にある穴は向こう側をのぞいたり手を入れたりできて、香木入りでいい香りがする穴もある。

駅前にキャンパスがある慶応義塾大経済学部一年、若海俊之さん(二〇)は「待ち合わせは『銀玉集合ね』で決めたりします」。ここで待ち合わせ中の同大文学部三年、笠本彩さん(二〇)は「穴の向こう側の友達と話したり、楽しくて待ち時間はすぐ過ぎる」。

穴に手を入れたりのぞいたりして遊んでいた港北区日吉本町二丁目の酒井伶奈ちゃん(三つ)、弟の暖ちゃん(二つ)の母親の美奈子さん(三三)は「この銀の球が大好きで、なかなか離れないんですよ」。



待ち合わせに人気のモニュメント。女性の右側の、いぶし銀のようになっているくぼみ部分の反射光で「事故」が起きた＝東急東横線日吉駅前で

YPC103