

平行電流がおよぼし合う力の相対論的理解

柏陽高校 山本明利

1. 平行電流がおよぼし合う力

真空中で互いに r [m] 離れて平行に置かれた2つの導線に、同じ向きに I [A] の等しい電流が流れているとき導線には互いに引き合う力がはたらきその大きさ F [N] は導線の長さ1 m あたり

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \dots\dots ①$$

となることを高校の物理で学びます。この現象は電磁気の世界と力学の世界をつなぐ重要なはたらきをしていて、国際単位系 SI のベースとなる MKSA 単位系では式①により電流の単位アンペア [A] を定めます。

すなわち、真空中で互いに 1 m 離れた長い平行導線に等しい電流を流すとき、その間にはたらく力が長さ 1 m あたり 2×10^{-7} N となるような電流の強さが 1 A です。ここからクーロン [C] やボルト [V] といった電磁気の全ての単位が定められていきます。したがって SI では真空の透磁率は実測値ではなく

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

という定義値になります。

ところで高校の物理では、この現象は磁場を介して電流同士が相互作用するものとして説明され、一方の直線電流が他方の位置に作る磁場

$$H = \frac{I}{2\pi r} \dots\dots ②$$

から他方の直線電流が受ける力として式①が導かれます。フレミングの左手の法則を適用すると力の向きが互いに引き合う向きになることも示されます。

2. 電子から見るとどう見えるか

さて、ここから高校では教わらない相対論

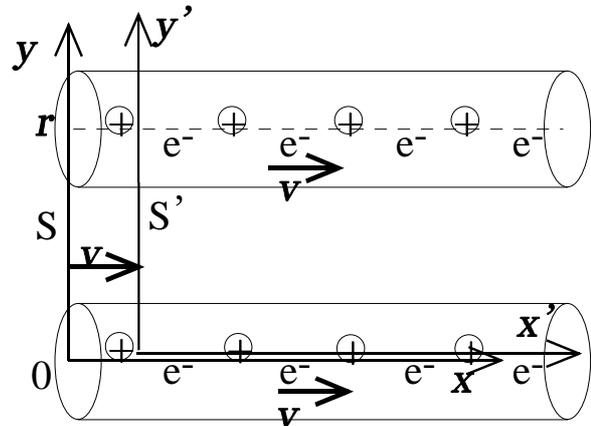


図1 S系(静止系)とS'系(運動系)

の世界に入ります。

これまでは静止した観測者 (S系と呼ぶことにします) から見て、静止した導線内を一定の平均速度で移動する自由電子が電流を担っているものとしてイメージしてきましたが、同じ現象を導線内を移動する自由電子の立場に立って考察してみます。つまり自由電子と共に等速直線運動する座標系 (S'系) に乗り換えて考えるのです。S'系から見ると両方の導線内の自由電子は共に静止しており、あべこべに導線内の結晶格子に配列した金属イオンが隊列を組んで電流の向きに移動していくように見えます。

平行導線は r [m] 離れて置かれているものとし、S系における自由電子の平均速度を v [m/s]、同じくS系における金属イオンと自由電子の電荷線密度を ρ [C/m] とします。S系においては導線は帯電していないので金属イオンと自由電子の電荷線密度は等しくなければなりません。一方の導線に沿って v の方向に x 軸をとり、他方の導線は $y = r$ に沿うものとします。

以上により、S系での電流の強さ I [A] は

$$I = \rho v \dots\dots ③$$

で表されます。

S'系では自由電子は平均的には静止して

いますから自由電子による磁場は生じません。また静止している電荷は磁場から力を受けません。しかし、現実として2本の導線の間には引力がはたらいています。S'系ではどんなしくみで引力が生じるのでしょうか。

3. ローレンツ収縮で現れる電気

静止している電荷が受ける力は電場からの力のみです。自由電子は相手の導線が正に帯電していると感じるのではないのでしょうか。

ここで登場するのが特殊相対論の効果である「ローレンツ収縮」です。S'系では金属イオン群が速度 $-v$ で運動しているため x' 軸方向にローレンツ収縮して線密度が増えます。一方、自由電子の方は、実はS系ではローレンツ収縮していてその結果として線密度が ρ だったのですが、S'系では収縮しないので線密度が若干減ります。これによりS'系では導線内の正負の電荷密度が一致しなくなり、導線が正に帯電して見えます。自由電子は相手の導線が作る電場から互いに引き合う向きの力を受けます。この力の大きさを計算してみましょう。

S'系での金属イオンの電荷線密度 ρ_i はローレンツ収縮したことにより増加して

$$\rho_i = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \dots\dots \text{④}$$

となります。 c は真空中の光速です。一方、S'系での自由電子の電荷線密度 ρ_e はS系で生じていたローレンツ収縮が解除されたことにより減少して

$$\rho_e = \rho \sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \quad \dots\dots \text{⑤}$$

となっています。以下では式を簡単にするため必要に応じ

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \dots\dots \text{⑥}$$

という表記を用いることにします。

S'系では正負の電荷密度の差による導線の帯電量は式④⑤の差をとって1 mあたり

$$\rho_i - \rho_e = \frac{\rho \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \dots\dots \text{⑦}$$

となります。

真空中で直線に沿って単位長さ当たり q の様な電荷分布があるとき、その周囲にできる電場 E は

$$E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r} \quad \dots\dots \text{⑧}$$

で与えられます。 ϵ_0 は真空の誘電率です。式⑧の q に式⑦を代入して、S'系で一方の導線が他方の導線の位置に作る電場の強さは

$$E = \frac{\rho \beta^2}{2\pi \epsilon_0 r \sqrt{1 - \beta^2}} \quad \dots\dots \text{⑨}$$

となります。これにより、自由電子が他方の導線から長さ1 mあたり受ける力(引力)の大きさは次のように求まります。

$$F = \rho_e E = \frac{\rho^2 \beta^2}{2\pi \epsilon_0 r} \quad \dots\dots \text{⑩}$$

ここで、式③と式⑥を用い、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \dots\dots \text{⑪}$$

であることに注意すると、式⑩は

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \quad \dots\dots \text{⑫}$$

と整理され、式①に一致します。

S系では磁場として見えていたものがS'系では電場に見える、それがローレンツ変換です。しかしS'系でも1 Aの定義を変更する必要はありません。

4. 力のローレンツ変換

ところで式⑫はS'系で導線1 mあたりにはたらく力として求めましたが、S系とS'系とでは長さの尺度が異なっているため、同じ1 mでもその中に含まれる電子の個数が両系で異なっていることとなります。それを表しているのが式⑤でした。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \dots\dots \text{⑬}$$

とおくとき、S系で式①の力を受けていたと考えられる長さ1 m分の電子の集団はS'

系では γ [m] の長さに分布しているはずですから、式⑫は γ をかけ算して

$$F' = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r \sqrt{1-\beta^2}} \dots\dots ⑭$$

と変更しなければならないのではないのでしょうか。でもそれでは式①と一致しなくなってしまう。ここに矛盾はないのでしょうか。

実は、S系からS'系へと座標系を乗り換えるときには力のベクトルもローレンツ変換を受けます。ローレンツ変換では、力のベクトルは運動方向と平行な x 成分は変更を受けませんが、それに垂直な方向の成分は γ 倍に変更されます。式①の力は y 方向なので、S'系では

$$F' = \gamma F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r \sqrt{1-\beta^2}}$$

となって式⑭と一致するのです。

力を電子一個あたりで評価しても、ローレンツ変換を注意深く吟味すれば両者の間に矛盾はありません。同じ現象を観測者の立場を変えて意味づけしているだけなのです。

5. 金属イオンの斥力は？

ところでS'系では2本の導線が共に正に帯電して見えるということは、互いに斥力をおよぼし合うということにもなります。実際、式⑨の電場は金属イオンも感じているわけですから、式⑨と式④とから金属イオンは長さ1 mあたり

$$F = \rho_i E = \frac{\rho^2 \beta^2}{2\pi \epsilon_0 r (1-\beta^2)} \dots\dots ⑮$$

という力(斥力)を相手の導線から受けることになり、その大きさはむしろ式⑮に勝ります。この点に矛盾はないのでしょうか。

S'系ではもう一つ見落としてはならないことがあります。それは金属イオン群が速さ v で x 軸の負の向きに運動しているということです。静止した自由電子のそばを、金属イオンが隊列を組んで行進していきます。これは平行電流と見なせますから式①のような力(引力)をおよぼし合うこととなります。式④を用いて金属イオンの運動による電流は

$$I_i = \rho_i v = \frac{\rho v}{\sqrt{1-\beta^2}} \dots\dots ⑯$$

となり、2つの導線の金属イオン群がおよぼし合う引力の大きさは式①を用いて次のように求まります。

$$F = \frac{\mu_0 \rho^2 v^2}{2\pi r (1-\beta^2)} \dots\dots ⑰$$

ここで

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = v^2 \epsilon_0 \mu_0$$

を考慮すると式⑰は式⑮に一致することが確かめられます。

つまり、金属イオンどうしにはたらく磁気的な力と相手の導線から受ける電気的な力がつりあい、打ち消しあってしまうのです。その結果、式①の力だけが残ります。ここでは長さ1 mあたりで比較しましたが、もちろんこの事情は長さにはよりません。

6. 反平行電流がおよぼし合う力

念のため、2つの導線に互いに逆向きに電流が流れている場合についても考察しておきましょう。S系では一方の電流の向きが逆になっても、力の向きが逆転する(斥力になる)だけで式①に変更はありません。S'系ではどうでしょうか。

図1で $y = r$ にある導線には逆向きに進行する自由電子があり、S系から見るとその平均速度は $-v$ であるものとします。高校の物理(ガリレイ変換)ではS'系での速度は $-2v$ になりますが、ここでは特殊相対性理論にしたがって速度の合成を考える必要があります。

S系に対して速度 v で運動しているS'系から、同じくS系で速度 u で運動している物体を見るとき、S'系からみた相対速度は

$$v' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

となります。今の場合相手の自由電子のS'系での速度 v_e は、上式で $u = -v$ とおいて次式となります。

$$\mathbf{v}_e = \frac{-2\mathbf{v}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad \dots\dots \textcircled{18}$$

一方、S'系で静止している自由電子の電荷線密度が式⑤で与えられることを考慮して、ローレンツ収縮を受けた相手の自由電子の電荷線密度は次式で表されます。

$$\rho_{e'} = \frac{\rho \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}$$

これにさらに式⑧を代入して根気よく整理すると次の式を得ます。

$$\rho_{e'} = \frac{\rho(1 + \beta^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \dots\dots \textcircled{19}$$

金属イオンの密度は式④と同じですから、この値はそれより大きく、導線は全体として負に帯電して見えることとなります。S'系では自由電子の方が速く運動しており、ローレンツ収縮が大きいので密度が高くなるからです。

式⑩と式④の差をとって、 $\mathbf{y} = \mathbf{r}$ にある導線の帯電量の絶対値は長さ1 mあたり

$$\rho_{e'} - \rho_i = \frac{\rho \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \dots\dots \textcircled{20}$$

となり、式⑦と等しくなります。ただし符号は負です。

これにより \mathbf{x} 軸上にある静止した自由電子群がうける電場からの力は、向きが反対(斥力)になることをのぞけば前と同様で、式⑩と等しくなり、式⑫に一致します。

以上、長さ1 mあたりで議論をしてきましたが、第4節での考察はここでも有効で力のローレンツ変換も考慮すれば電子1個あたりの力も両系で正しく一致していることが確かめられます。

7. 結びに代えて

このように電場と磁場は見る立場によって互いに入り交じって姿を変えます。これが電磁場の本質です。磁気的な現象は電場の相対論的な補正項の効果であるとも言えるわけですが、驚くべきはその補正の小ささです。普通の電流をイメージすると、自由電子の平均速度は驚くほど遅く、式⑥の β の値は 10^{-12}

以下です。式⑬に示した γ の値は1よりわずかに 10^{-25} 程度大きいだけです。それは1 mの長さに対して水素原子核(陽子)の直径の百億分の1程度の補正をもたらすものでしかありません。全く無視できるような補正ですが、その補正が磁気的な効果となって現れ、鉄を引きつけたりモーターを回したりと顕著な働きをします。

私も遠い昔、学生だった頃にファインマンの「電磁気学」で読んでこのことに感動したものです。ちょっと長くなりますが最後にその一節を引用して本稿の結びに代えます。

「電線中の電子の速度を評価してみると、電線にそった平均速度はだいたい 0.01cm/secである。従って v^2/c^2 は 10^{-25} くらいになる。確かに無視できる"補正"である。しかしとんでもない! このばあい、磁気力は動く電子間の"普通"の電気力に比べると 10^{-25} 倍であるが、電線には同数の陽子と電子があるためほとんど完全に打ち消し合って、"普通"の電気は消滅していることを忘れてはならない。打ち消しは 10^{25} 分の1よりも精密で、そのため磁場と呼ぶ小さな補正だけが残る。それが主要な項になる。

物理学者が実際は相対論的效果であることを知らなくても、相対論的效果(磁場)が研究でき v^2/c^2 の程度まで正しい方程式を発見できたのは電気力の打ち消し方がこうも完全であったためである。そして同じ理由で、相対論が発見されたときにも、電磁気の法則は変更する必要がなかった。力学とちがって、電磁気の法則は v^2/c^2 の精度で正しい。」

参考文献

ファインマン「ファインマン物理学Ⅲ・電磁気学」宮島龍興訳(岩波書店)1969年

広江克彦「EMANの物理学」
<http://homepage2.nifty.com/eman/>

杉山忠男「物理の世界」
<http://www.geocities.jp/mtsugi04/>

(2012/09/23)