

錐体鏡を使った多面体製作

H17.12.10

第1部 多面体のおさらい

まず、頭のエンジンのスイッチを入れるため、簡単な問題から。(小学校4年生レベル)

第1問 制限時間 5分

1種類の図形だけを選んで複数重ね合わせると平面を敷き詰めることができます。ただ回転や裏返しは原則で、平行に動かすことしか許されません。さて、次の図形で可能な図形はどれでしょうか？

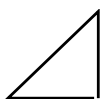
正三角形



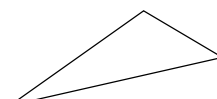
二等辺三角形



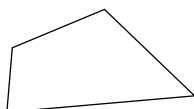
直角二等辺三角形



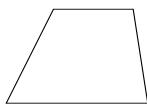
(一般的な)三角形



(一般的な)四角形



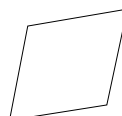
台形



平行四辺形



菱形



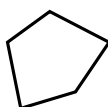
長方形



正方形



(一般的な)五角形



正五角形



(一般的な)六角形



正六角形



正七角形



この問題は平面の敷き詰めという問題として教科書に出ています。

この図形をしっかりと頭の中に留めて、次の問題です。(小学校5年生レベル)

第2問 制限時間 5分

次の立体の中で1種類だけ選んで、いくつか重ね合わせると空間を敷き詰めることができるものが3種類あります。どれでしょうか。

正4面体



立方体



正8面体



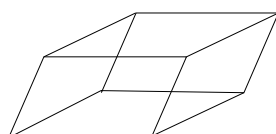
正12面体



正20面体



平行6面体



直方体

図は多面体の世界へようこそ <http://www5d.biglobe.ne.jp/~MY55029/index.htm>

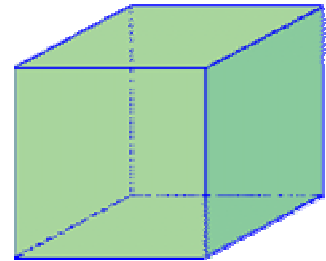
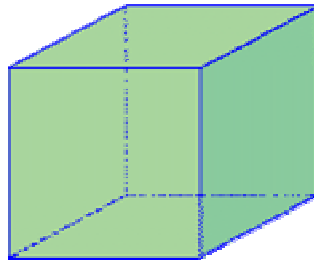
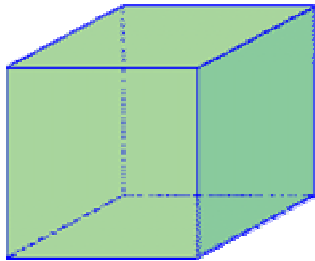
1種類の立体だけで空間を敷き詰めることができるものは限られています。

5つの正多面体の中では、たった1つしかありません。

正多面体の中でも立方体には、何か面白い性質がありそうなので少し考えてみましょう。

第3問 (体積という言葉は、小学校5年生。実際に四角柱の体積の求め方は小学校6年生) 制限時間 5分

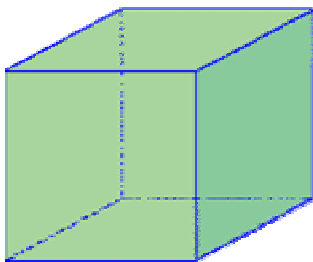
立方体を体積(大きさ・量)が半分になるように2つの合同な形に切り分けたい。どのように切り取れば良いでしょうか？ただし、1度しか切り込みを入れてはいけません。



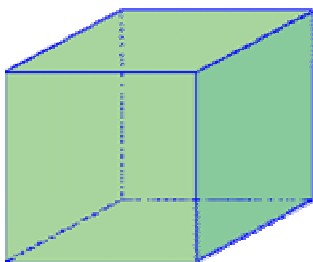
発展

(第3問ではつまらないという人、中学校2年生以上向き) 制限時間 20分

立方体を3等分にしたい。どのように切り取れば良いでしょうか？切り込みは何回でも入れてもよい。また3等分された立体の展開図も描いてみてください。



ヒント？



【教養コラム】時間 5分

参考文献：正多面体を解く 一松 信

5つの正多面体のうち、正4面体、正6面体(立方体)、正8面体は、鉱物の結晶形として現れますので古くから知られていたようです。(英文も参照)

人工物ですが、2千数百年前のエトルリアの遺物中に青銅製の用途不明の正12面体があり、正20面体は最も遅れて発見されたようです。結晶形にはありえない物だと言われていましたが、拡散虫が正多面体の形をしている他、ある種のウィルスやホウ素(B)の単体が正20面体であると分かっています。

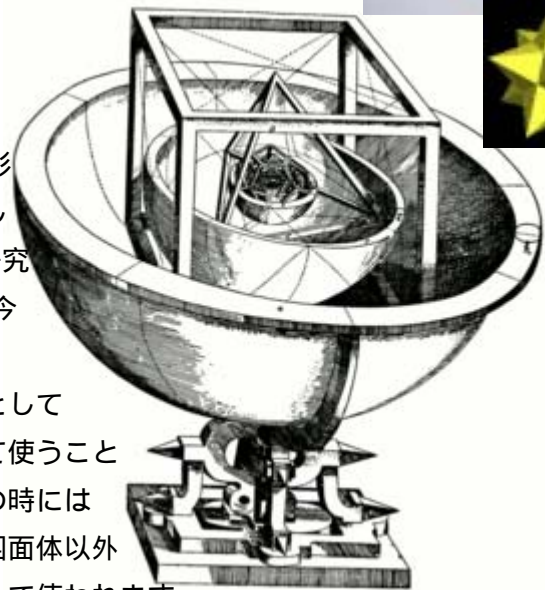
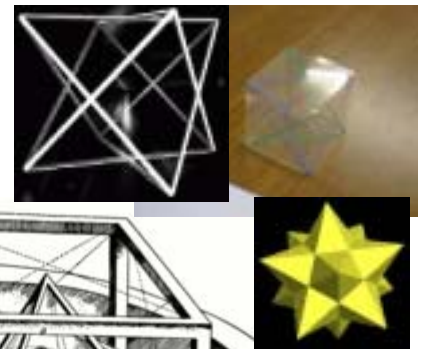
正多面体が5種類しかありえないことを初めて証明したのが誰だかはっきりしませんが、プラトンがそれを知っていてユークリッドの『原論』第13巻には証明が載っています。後世600年に第15巻まで追加され、正多面体の性質や正多面体以外の多面体が多く載っています。

正多面体の研究を古代ギリシアから発展させたのは、16世紀末のケプラー(Johannes Kepler 1571年~1630年)であるようです。彼は惑星運動の法則を発見した天文学者として有名ですが、数学者としての大きな実績もあります。(星形正多面体の発見)

しかし、彼が若かりし頃書いた『宇宙の神秘』の中に、6惑星(水星・金星・地球・火星・木星・土星)の軌道半径と正多面体との関係を論じていました。土星の軌道半径をもつ球に、正6面体を内接させてそれに内接する球の半径が木星の軌道半径であり、以下正4面体、正12面体、正20面体、正8面体と続けて、最内の水星まで達するというモデルです。

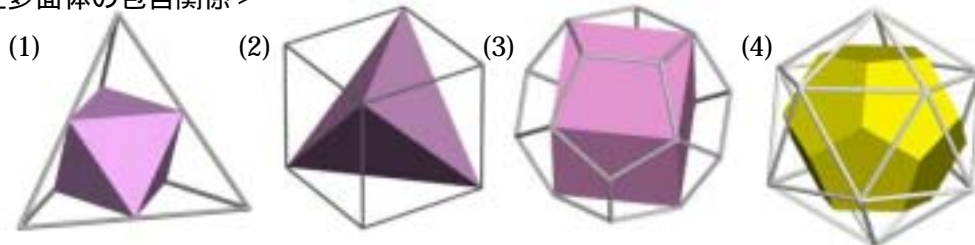
ケプラーから200年経って、ポアンソが他の星形多面体を発見し、コーシーが全部であることを証明しました。4次元以上の空間と、その内の正多面体の研究が始まったのは、19世紀後半になってからであり、今尚続いています。

正多面体は、数学上でも重要ですが実用上の応用として正多面体を「さいころ」として「乱数発生器」として使うことでしょう。政治上や宗教上の理由から言葉がタブーの時には「立方体状乱数発生器」といえばよいそうです。正四面体以外の他の正多面体も、実際に複雑な「乱数発生器」として使われます。



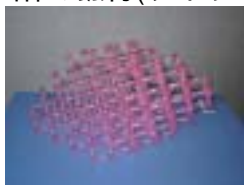
ケプラーが考えた惑星の軌道を支える正多面体

< 正多面体の包含関係 >



製作は
中学3年生以上
レベル

< 正8面体の鉱物(ダイヤモンド構造) >



今皆さんの手元に配られる立体は、準正多面体の切頂8面体と言います。

第4問

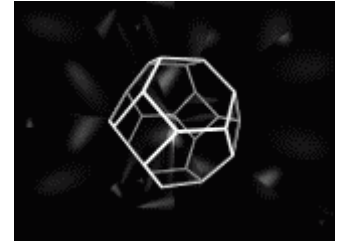
(フリーレベル)

制限時間 20分

後休憩 10分

- (1) 1つの面の形は何という形でしょう。それが何枚の面でできているか考えてください。
- (2) この切頂8面体の体積(量・大きさ)は最初からテーブルにあった立方体の体積のちょうど整数倍です。何倍になっているのでしょうか？
- (3) この切頂8面体は、この立体だけでも空間を敷き詰めることができます。何故でしょう。

ヒント：プリントの展開図の立体を2つ作れば直ぐ分かる！！



(補題) 答えは簡単に提示しますので、家庭で作ってみてください。

下の図の菱形12面体もこの立体だけで空間を敷き詰めることができます。

上の問題の解答をヒントに、どんな立体を準備して、どのように切断して細工すれば良いのか考えてみてください。

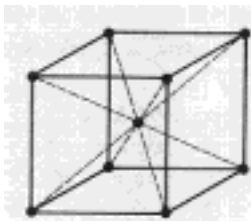
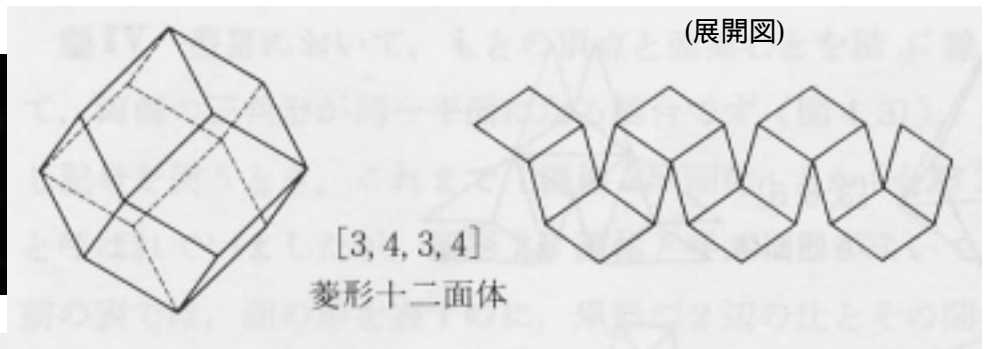
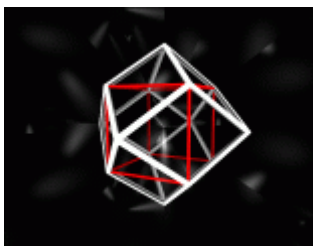


図4.39 体心立方格子

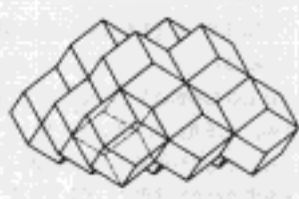


図4.42 菱形十二面体による空間充填形

第2部 ^{すいたいきょう}錐体鏡を用いての^{せいさく}正多面体製作

皆さんの家では^{さんめんきょう}三面鏡がありますか？何故一枚の^{かがみ}鏡ではなくて三枚の鏡なのか分かりますか？
皆さんと同様に三面鏡で遊んだことが皆さんのお父さん、お母さんの時でもあるはずですよ。

何か不気味な^{そうぞう}想像をした身に覚えがありませんか？

鏡の中のそのまた鏡の中の、そのまた鏡の中のそのまた・・・自分の顔・・・。

これを^{かがみ}合わせ鏡といいます。

合わせ鏡の不気味な世界は色々と本になっています。

皆さんのお父さん、お母さんが小学校の高学年～中学生の頃、良く流行ったSF小説を紹介しますので、一部読んでみましょう。

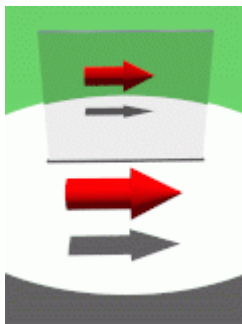
(SFという言葉の意味を知っていますか？これを機に色々な本を読みましょう！)

(朗読) 10分

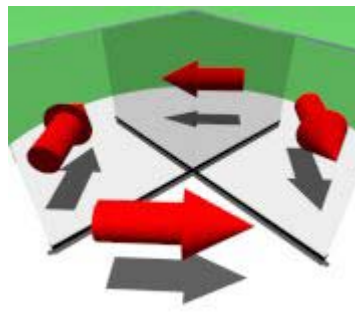
第5問 制限時間 5分

下の図のように1枚の鏡に1つの矢印^{やじるし}の像を映すと、それは1つで向きが逆さまになっています。また2枚の鏡の場合は、4つの矢印^{うつ}の図形の像になります。

では、3枚の鏡を立方体の面のように立てかけた場合、図形は何個の像に映るでしょうか？



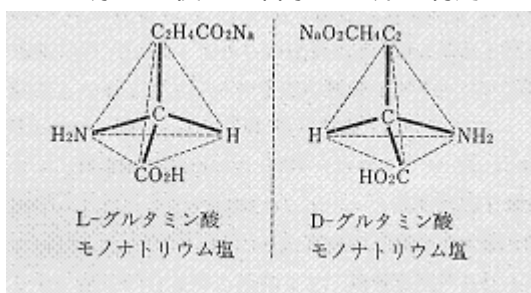
1枚の鏡に映した場合



2枚の鏡に映した場合

【教養コラム】

このような鏡を利用して像がどのように映るかを考える数学を^{きょうえいしやぞう}鏡映写像といいます。
この原理を使って科学の世界に利用したのがあります。



化学調味料にはDとLの2種類があって、C原子のまわりの結合順序(右巻きか左巻き)による違いである。その分子を受け取る人間の舌の細胞の構造はL体しか受け入れないで、D体は味がない。

鏡像異性体や構造異性体という言葉調べてみよう。

「第1問」を思い出してみましょう。 制限時間 **10分**

平面を敷き詰める図形として、正方形、正六角形、^{ひしがた}菱形を選びます。(平行四辺形、長方形は省く)
先程の3枚の鏡に立てかけるとどんな図形ができると思いますか？

映像を見て、答えをカッコの中に書いてください。

できた立体図形

正方形 → ()

正六角形 → ()

^{ひしがた}菱形 → () おまけ 正三角形 ()

鏡を介すると平面と空間の敷き詰め^{かい}の関連がつきやすいですね。

次に3枚の鏡の面の形は正方形ですが、正方形を対角線で切り取った図形は、直角二等辺三角形になります。この直角二等辺三角形を3枚使ってできた立体を、ある三角錐と呼びましょう。

三角錐の種類は沢山あります。また、底面が四角形の場合は四角錐、五角形の場合は五角錐と言いま

す。面が鏡でできているので、これを **錐体鏡** と呼ぶのです。

そこで、3つの合同な正三角形の鏡シートを使って、正三角錐(正4面体)を作ってください。

(注意) 制限時間 **20分**

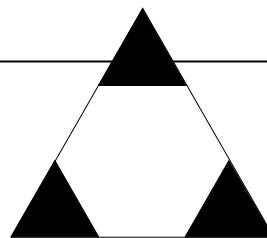
- (1) 内側が綺麗な鏡になるようにして、外側はセロテープか何かで固定してください。
- (2) 3枚の三角形のそれぞれの頂点1つだけを選んで、先端1cm(3枚とも同じ大きさになるように)を切り取ってください。

できた立体の内側を覗いてみましょう。どんな図形ができていますか？
また今日習った内容と話がつながるところは、何処ですか？
(見にくい場合は、1辺の長さが3cmの正三角形を内側にはめ込みましょう)

実験(自由研究)

制限時間 **15分**

右下の図の三角形のように黒塗りしたものを立体の内側にはめ込むと、
どんな立体が見えるでしょうか。



前画面の立体模様を作るには、三角形シートにどのようなデザインをすれば良いか考えてみましょう。