ＹＰＣ2025年８月例会

レンズに関する「ニュートンの公式」

山本　明利

一般的なレンズの結像公式

高等学校で学ぶいわゆる「レンズの式」（結像公式）は、

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \qquad \cdots\cdots(1)$$

という分数形で表現されている。各文字の定義は、レンズを原点に置き、レンズより負側に物体または実像があるとき物点距離 $a>0$、虚光源が正側にあるとき $a<0$ と考える。像の位置は像点距離 $b>0$ のとき実像、$b<0$ では虚像となる。焦点距離は凸レンズで $f>0$、凸レンズでは $f<0$ である。式(1)は覚えやすい形の式だが、数値計算ではいちいち逆数を求めなければならず、使いやすいとは言えない。グラフもイメージしにくい。

ところで、高校物理では見かけないが、結像公式(1)は

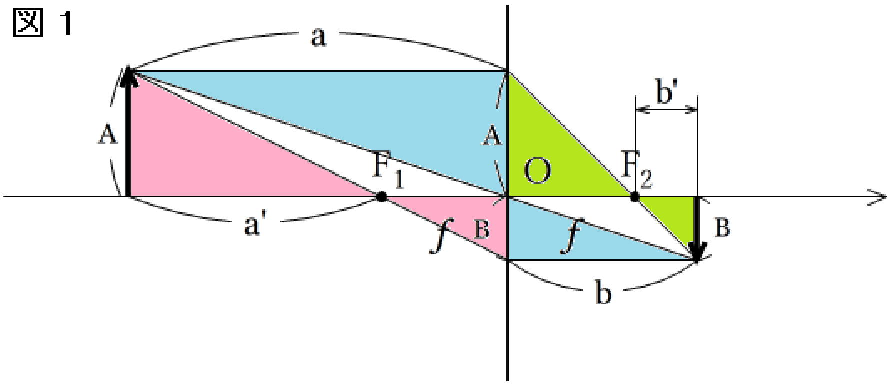
$$(a-f)(b-f)=f^2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

と変形することもできる。式(2)は**ニュートンの公式**と呼ばれる。こちらも美しい式だ。何よりもうれしいのは分数形でないことで、積の形で表現されているのが扱いやすそうだ。

ニュートンの公式の幾何学的証明

ニュートンの公式(2)は式(1)から代数的にも導けるが、幾何学的に証明してみよう。

図 1



凸レンズを例にとる。図１で、原点Ｏにレンズがあり、物体Aの像がＢにできているとする。A、Ｂがそれぞれの大きさを表している。F_1、F_2が焦点で、焦点距離は f である。$a'=a-f$、$b'=b-f$ は式(2)の左辺に登場する量で、物点距離、像点距離からそれぞれ焦点距離を差し引いた長さである。

まず、F_1を共通の頂点として向きあうピンク色の相似な二つの三角形に注目すると、次が成り立つ。

$$\mathrm{A}:\mathrm{B}=a':f \qquad \cdots\cdots(3)$$

また、F_2を共通の頂点として向きあう黄緑色の相似な二つの三角形に注目すると、同様に

$$\mathrm{A}:\mathrm{B}=f:b' \qquad \cdots\cdots(4)$$

が成り立つ。(3)、(4)から直ちに、

$$a'b'=f^2 \qquad \cdots\cdots(5)$$

が導かれる。これはニュートンの公式（式(2)）である。

一方、原点Ｏを共通の頂点として向きあう空色の相似な二つの三角形に注目すると、次も成り立つ。

$$\mathrm{A}:\mathrm{B}=a:b \qquad \cdots\cdots(6)$$

物体と像の大きさの比の符号を変えたもの

$$M=-\frac{B}{A}=-\frac{b}{a} \qquad \cdots\cdots(7)$$

を倍率と呼ぶ。$M>0$ で正立像、$M<0$ のとき倒立像である。(3)(4)(6)(7)から、次の関係も導かれる。

$$b'/a'=M^2 \qquad \cdots\cdots(8)$$

これらの単純で美しい関係が成り立つ理由は図１に集約されると言ってよい。図１で注目した３組の相似な三角形のペアは原点Ｏおよび二つの焦点F_1、F_2の３つの固定点を各組の頂点として共有し、物体が動くと全体がリンクして変形する。例えば、物体の大きさＡを一定に保ったまま、その位置を焦点F_1に向かって少し近づけたとしよう。空色の三角形の斜辺は傾きを増すが、黄緑色の三角形の斜辺の傾きは変化しない。その結果、それらの交点は焦点F_2から遠ざかることになる。このときＢはa'に反比例して増加し、b'はＢに比例するから、式(5)の関係が成り立つのは動的にもイメージできる。

レンズの式のグラフ

式(1)の分数形ではaとbの関係を表すグラフはイメージしにくいが、ニュートンの公式

$$(a-f)(b-f)=f^2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

の形ならaを横軸、bを縦軸にとったグラフは、図２のようになることがすぐにわかる。つまり、aとbの反比例の双曲線を、縦軸と横軸に沿ってそれぞれ正の方向にfだけ平行移動したグラフになるのである。凹レンズでは上下左右を反転した曲線になる。

倍率Mについては、式(5)と式(8)から、

$$Ma'=-f \qquad \cdots\cdots(9)$$

が得られるので、Mのグラフは右下の図３のように、反比例のグラフを左右逆にし、横軸方向にfだけ平行移動したグラフになることがわかる。凹レンズでは左右が反転する。

このように、ニュートンの公式(2)は図形との関係が大変イメージしやすく美しい。

$$a'b'=f^2 \qquad \cdots\cdots(5)$$

の形は究極の単純さだ。要するに、物体の位置や像の位置を、レンズの中心からではなく、それぞれの側の焦点位置からa'とb'で測ることにすると、a'とb'は単純に「反比例」するのである。

図２

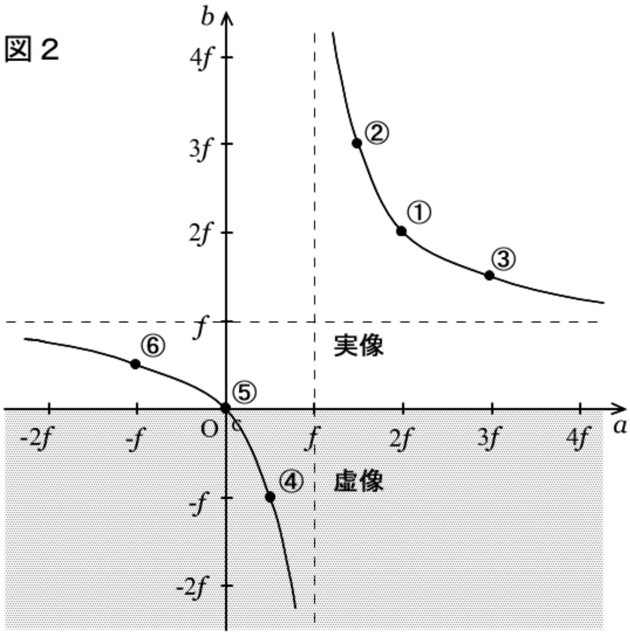
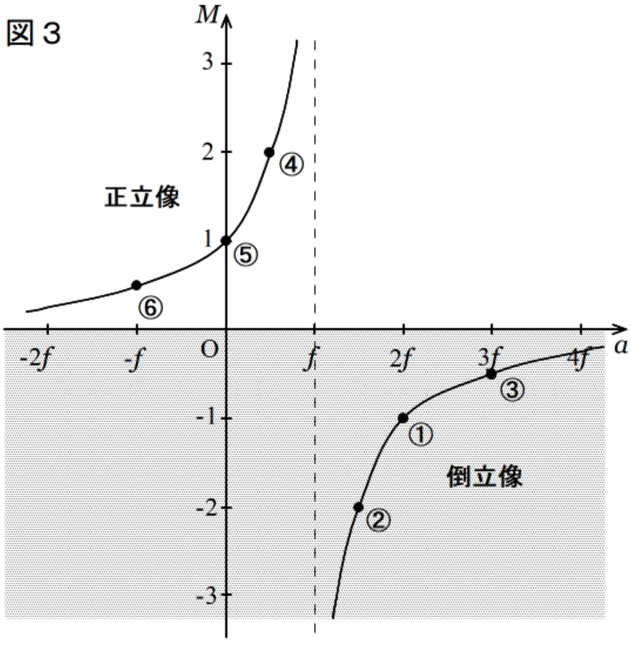


図３



ニュートンの公式の便利さ

ニュートンの公式（式(2)または(5)）はイメージがしやすく暗算にもむいている。図２と図３にはグラフ上にいくつかの代表的な条件の点を丸付き数字で示した。試みに、これらを暗算で解いてみるとよい。例えば①は$a=2f$の場合だが、

$a'=f \ \rightarrow\ b'=f \ \rightarrow\ b=2f \ \rightarrow\ M=-1$ と直ちに暗算で計算ができるだろう。グラフ上の一点が決まれば、あとは反比例の関係で攻めていけばよい。

ちなみに①の点は、原点Ｏを除くと$a=b$となる唯一の点であり、$a+b$の値が最小値をとる、つまり物体と像の距離が最も近くなる条件を満たす。図２に右下がり 45°の直線（$a+b$が一定値をとる点の集合）を描き加えて平行移動してみればこのことがよくわかる。

光路図との対応

図２および図３の①～⑥の点にに対応する光路図を下に示した。ただし、$a=b=0$ となる点⑤は省略した。それぞれの図中、太い赤線で示した長さが $a'=a-f$、太い青線で示した長さが $b'=b-f$ であり、負の値をとるときは破線で表した。矢印は物体または像を示し、虚光源（虚物体）や虚像を破線で表した。なお、虚光源（虚物体）とは、他の光学系による実像が、いま対象にしているレンズより正の側（図の右側）に結ぶような場合を言う。

①は前述のように $a=b=2f$ となる場合で、等大の実像が原点Ｏを中心に物体と点対象の位置にできる。倍率は $M=-1$ である。M が負の時は倒立像を表す。

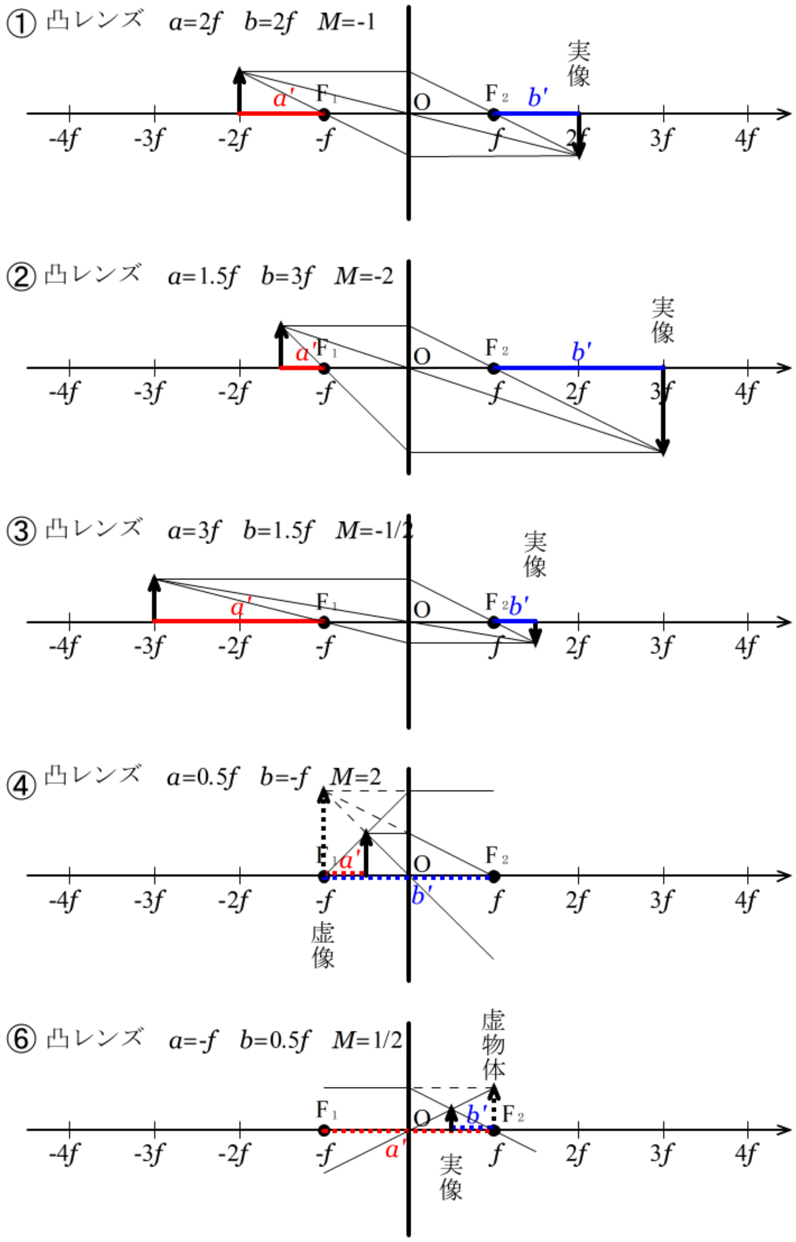
ニュートンの公式はこの図をホームポジションとして考えるとわかりやすい。

②は a' を半分にした場合で、b' が２倍になっていることがわかる。倍率が－２倍になることは式(9)からもわかる。

③は逆に、①に対して a' を２倍にした場合で、b' が半分になっている。倍率は－1/2 倍である。

④は物体が焦点の内側に入り、虚像ができるケース。a' が負になるので b' も負になる。倍率は式(9)により正、すなわち正立像になる。この領域では、物体が焦点 F_1 に近づくにつれて（$a'\to 0$）像の大きさや倍率は無限大に発散する。

⑥は虚光源（虚物体）の場合で、レンズを突き抜けた位置に像を結ぼうとする入射光線がある。このとき $a<0$、$a'<-f$ なので、倍率は $0<M<1$ となり、小さな正立像が原点Ｏと焦点 F_2 の間にできる。



結びに代えて

理科教室の本年５月号[1] に拙稿を掲載していただいた。記事中のコラムでニュートンの公式と図２および図３のグラフに軽く触れたが、紙数の関係で詳しく解説することができなかったので、ここで改めて詳しくご紹介した。記事中でも述べたが、幾何光学では機械的な作図や計算だけでなく、グラフをイメージすることで理解が飛躍的に進む。その際、結像公式を「ニュートンの公式」の形で示すことが効果的なのではないだろうか。

【参考文献】

１）科学教育研究協議会「理科教室」2025 年５月号、メトロポリタンプレス

２）谷川・光学資料集・幾何光学・レンズとガウス光学・京都産業大学
https://www.cc.kyoto-su.ac.jp/~tanigawa/course_materials/Optics/lens.pdf