

ニュートンビーズ（鎖の噴水）現象の全過程解析～非弾性衝突による異常抗力による上昇加速度の発生から先端の床への衝突後の挙動まで

夏目雄平（千葉大学国際教育センター）、高橋利宏（学習院大学理学部）
yh.natsume@gmail.com, toshi.takahashi@me.com

この現象は定常状態に関する解析はほぼ確立されているが、形状が変わっていく非定常状態の解析は不十分であり、特に先端が床に衝突後の振舞に触れた例はほとんど無い。ここではすべての過程を解析することで本現象の全体像を把握できるようになった。

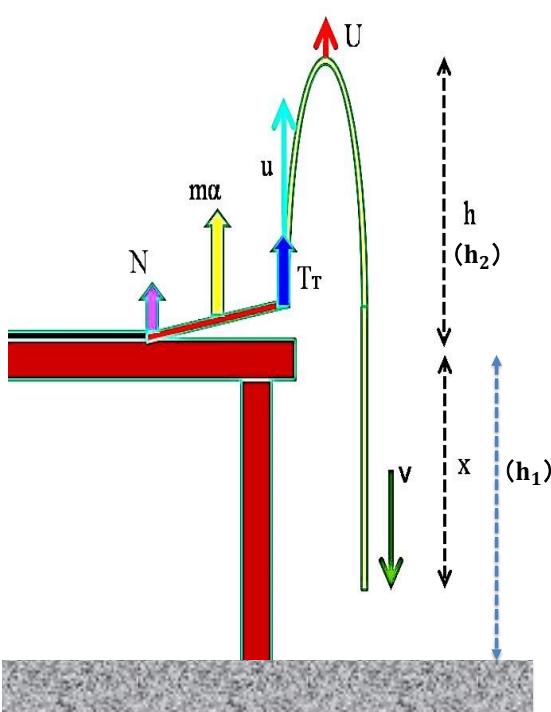
振り返って、鎖の立ち上がりを調べると、基礎パーツの剛体に働く「異常抗力」が有限値からゼロに近づく「無限小の上昇解」と、そもそもゼロの「自由落下解」はつながっていない。この「解の非連続性」は流体力学では粘性の効果などでよく見ることができるが、鎖系では稀な例であることを強調したい。

○力学演習書[1]などで知られているように、鎖の自由落下では加速度は重力加速度 g の 3 分の 1 である。これは落下の際、非弾性的に加わる質量が落下を妨げるからである。

○鎖が上昇するのは、連続体となった鎖から非弾性的に鎖の基本パーツが引き上げられる際に、パーツが剛体であって、他端が床（他のパーツ）から抗力を受けるためである[2]。異常抗力と呼ばれている。その分だけ、既につながって連続体となった鎖からうける張力 (ρu^2 で記述される、ここで、 ρ は線密度、 u は速さ) に対抗する下向き力が小さくなる。その差分だけ上向きの加速度となるわけである。

それを記述するには、頂点に対して上昇側と下降側の 2 つの非線形連立方程式となる。

図 1 のように、床（下端の太い横線）に置いた台の上面（コの字の上横線）から登っていく鎖の運動方程式を作成してみる。頂点から落下する部分の運動方程式はそれぞれ、次



のように表される。そこでも用いたように、鎖の全長を l 、台から測った頂点の高さを h 、台から下の部分の長さを x とすると $l = x + 2h$ の関係がある。さらに、台から上向きの鎖の速さ $u = \frac{dl}{dt}$ 、頂点の上昇速度 $U = \frac{dh}{dt}$ 、 x の速さ $v = \frac{dx}{dt}$ を定義すると、鎖がたるみなく繋がって運動している条件から $u - U = v + U$ つまり

$$u = v + 2U \quad (1)$$

が得られることに注意する。

ここで重要なのは、台が鎖に及ぼす「異常抗力」 N を表すパラメータ α で $N = \alpha \rho u^2$ と表した[3]。これは鎖の基礎パーツが剛体であり完全非弾性的に連結することが本質である。実際、 α は

剛体の形によって 0 から 0.5 の間の値をとる。

ここで、机から頂点まで(即ち図 1 の左側の鎖)の運動方程式として

$$h \frac{du}{dt} = -3Uu + U^2 + \alpha u^2 - hg \quad (2)$$

頂点から床まで(即ち図 1 の右側の鎖)の式

$$(U + v)^2 + (h + x) \frac{dv}{dt} = (h + x)g \quad (3)$$

が得られる。

これは、非線形連立方程式であって容易には解けない。そこで、等加速度運動の解を想定して議論する。

改めて、次の解を仮定する。 $x = \frac{1}{2}at^2$ 、 $h = \frac{1}{2}At^2$ 、 $v = at$ 、 $U = At$ 、 $\frac{dv}{dt} = a$ 。

(3) に代入すると、

$$\begin{aligned} (A + a)^2 t^2 + \frac{1}{2}(A + a)t^2 a &= \frac{1}{2}(A + a)t^2 g, \\ 2(A + a) + a &= g, \quad 3a = g - 2A, \quad a = (g - 2A)/3 \end{aligned}$$

なので、これを(1)に代入して以下を得る：

$$u = v + 2U = (a + 2A)t = (g + 4A)t/3 \quad (4)$$

さらに、これらを式(2)に代入して t^2 で割り、係数を整理すると、頂点の上昇加速度 A に対する 2 次方程式とその判別式が得られる。運動方程式(2)と式(3)を連立させて、等加速度運動を求めたわけである。

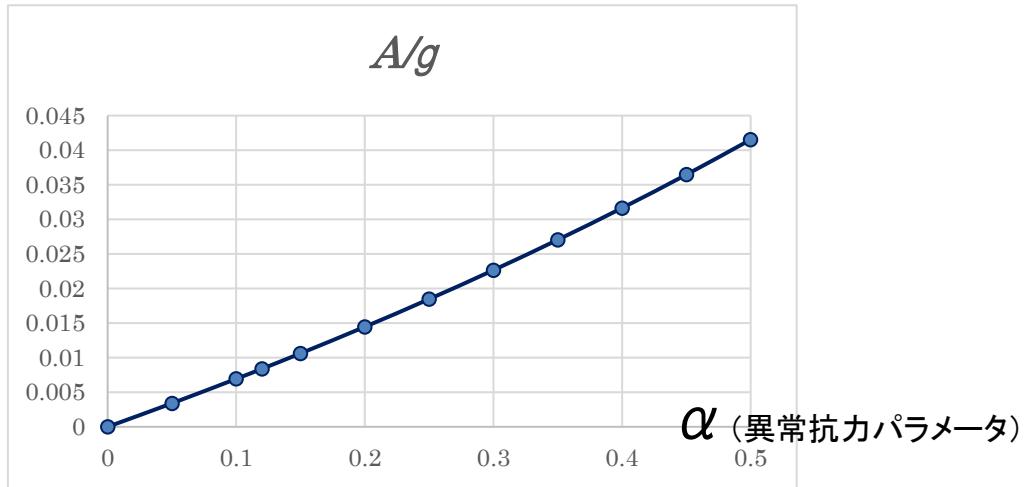
$$\begin{aligned} (66 - 32\alpha)A^2 + (30 - 16\alpha)Ag - 2\alpha g^2 &= 0 \quad (5) \\ D' = (15 - 8\alpha)^2 + 2\alpha(66 - 32\alpha) &= 225 - 108\alpha \end{aligned}$$

これは次のように厳密解を表記できる。

$$\frac{A}{g} = \frac{-(15 - 8\alpha) \pm \sqrt{225 - 108\alpha}}{66 - 32\alpha} \quad (6)$$

抗力が働くないとき、すなわち $\alpha = 0$ のとき、負でない解は $A = 0$ のみとなって、鎖の頂点の上昇はなく、解は自由落下の場合に一致する。

求めた式(6)で、 α が有限の時、 $\frac{A}{g}$ の正の根を α の関数としてグラフにする。



これを見ると、現実的な値 ($\alpha=0.3 \sim 0.4$) では、自由落下 $g/3$ の十分の一程度であることは興味深い。

○先端が床に着いた後の定常状態

実験によると、鎖の先端が床に着いてしまうと、まもなく頂点の上昇が止まり、鎖はその（上に凸の）形を保ったまま落下を続ける。(2)および(3)の運動方程式をもとに、鎖の先端が床に着いたあとの定常状態を議論することができる。ここでは、床からの抗力は完全非弾性的で鎖の運動に影響を与えないとする。

床から台までの高さを h_1 、台から頂点までの高さを h_2 とする。

定常状態では $x = h_1$ 、 $h = h_2$ 、かつ $\frac{dv}{dt} = 0$ 、 $U = 0$ である。鎖の速さは $v = u$ となつて、この値を v_∞ とおいて (2) および (3) に代入すると、運動方程式は結局、

$$0 = \alpha v_\infty^2 - h_2 g \quad (7a), \quad v_\infty^2 = (h_1 + h_2)g \quad (7b)$$

となる。これらより、 h_1 に対する h_2 の比は異常抗力のパラメータ α によって、 $\alpha = h_2/(h_1 + h_2)$ 、 $h_2/h_1 = \alpha/(1 - \alpha)$ と与えられる。これは、既に[3]で報告されている定常状態の関係式と一致している。

○ここでは全過程の解析なので、等加速度運動とみなせる運動が終了した後、どのように定常状態に移行するかを調べる。

運動方程式は以下になる

落下する側は(3)において $x = h_1$ と置き換えて、

$$(h + h_1) \frac{dv}{dt} = (h + h_1)g - (U + v)^2 \quad (8)$$

と表されるが、 h 、 U が時間の関数なので、容易に解けない。

上昇する鎖の側の運動方程式は、前と変わらず(2)のままである。

この2つの式(2)、(8)を、(1)の条件 $u = v + 2U$ のもとで連立させて解を求める必要がある。しかし一般解を求めるのは容易ではない。

そこで、定常状態への緩和過程なので緩和時間 τ の指数関数の解を探索する。即ち

$$h = h_2 - h'e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad v = v_\infty - v'e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad U = \frac{dh}{dt} = \frac{h'}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v'}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9)$$

時間の原点は、鎖の先端が床に着いた時に取り直した。この段階では、 h', v' は未知数であるが、式が二つあることからコンシスティント条件から消すことを考える。

これらを運動方程式に代入して、 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ のべきで整理し、両辺の係数の比較からパラメータの満たすべき関係を求める。まず式 (8) に代入すると次式となる。

$$(h_1 + h_2 - h'e^{-\frac{t}{\tau}}) \frac{v'}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = (h_1 + h_2 - h'e^{-\frac{t}{\tau}}) g - \left(v_\infty - v'e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{h'}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 \quad (10)$$

0次の項を比較して、 $0 = (h_1 + h_2)g - v_\infty^2$ を得る。これは当然、定常状態の式 (7b) そのものである。さらに、1次の項から、

$$(h_1 + h_2) \frac{v'}{\tau} = -h'g + 2v_\infty \left(v' - \frac{h'}{\tau} \right) \quad (11)$$

を得る。右辺では U と U^2 の寄与が本質である。また、左辺は (7b) より $\frac{v_\infty^2 v'}{g\tau}$ になる。

一方、上昇する側の鎖の運動方程式 (2) に先の解 (9) を代入すると、次の式になる。

$$\begin{aligned} & (h_2 - h'e^{-\frac{t}{\tau}}) \left(v' - \frac{2h'}{\tau} \right) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -3 \frac{h'}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(v_\infty - \left(v' - \frac{2h'}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ & + \left(\frac{h'}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 + \alpha \left(v_\infty - \left(v' - \frac{2h'}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 - (h_2 - h'e^{-\frac{t}{\tau}}) g \end{aligned} \quad (12)$$

右辺では U と $\frac{dv}{dt}$ の寄与が重要である。ここで、 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ の0次の項を比較すると、当然 (7a) 式 $0 = \alpha v_\infty^2 - h_2 g$ になっている。次に両辺の1次の項を比較すると、

$$\left(v' - \frac{2h'}{\tau} \right) \frac{h_2}{\tau} = -3 \frac{h'}{\tau} v_\infty - 2\alpha v_\infty \left(v' - \frac{2h'}{\tau} \right) + h'g \quad (13)$$

になった。ここで、左辺の $\frac{h_2}{\tau}$ は (7a) より $\frac{\alpha v_\infty^2}{\tau g}$ になる。

○漸近的振舞いの数値解

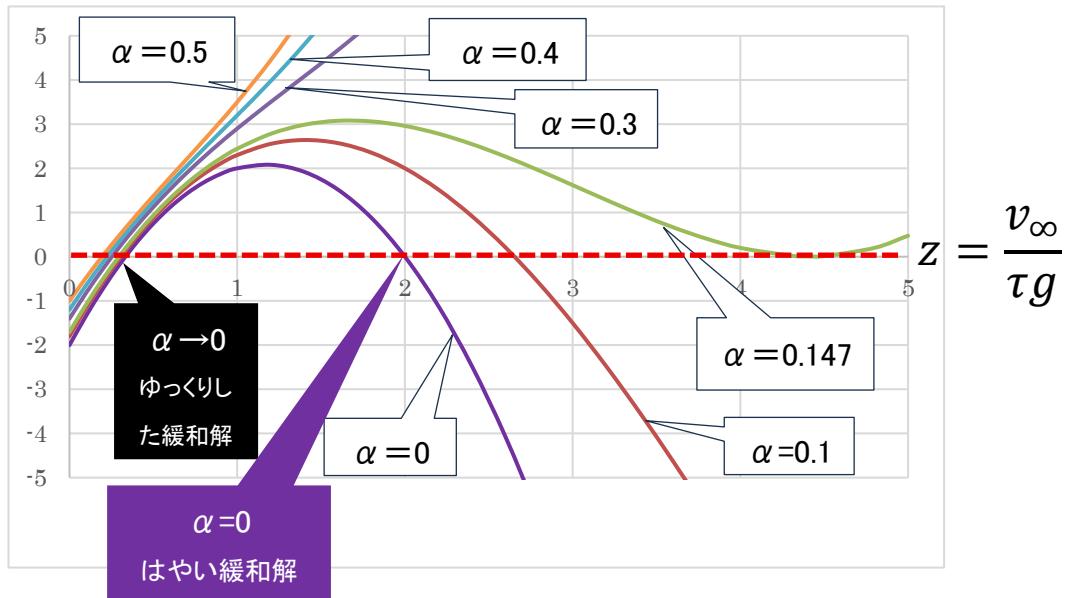
ここで、(11) と (13) へ (7b), (7a) を適用した式を連立させる。具体的には、それぞれの式で緩和の減速度 $\frac{v_\infty}{\tau}$ を g で割った無次元の変数 $z = \frac{v_\infty}{\tau g}$ で、未知数の比 $\frac{h'}{v'}$ を無次元化した $\frac{h'}{\tau v'}$ を求めると次式になる。

$$\frac{h'}{\tau v'} = \frac{z^2 - 2z}{-1 - 2z} = \frac{\alpha(z^2 + 2z)}{2\alpha(z^2 + 2z) + 1 - 3z} \quad (14)$$

このようにして、無次元量 $\frac{h'}{\tau v'}$ を消去することで、変数 z に関する方程式が得られる。それは変数 $z=0$ の解の他に、次のような係数に α を含む z に関する 3 次方程式が得られる。

$$2\alpha z^3 + (2\alpha - 3)z^2 + (7 - 3\alpha)z + (2\alpha - 2) = 0 \quad (15)$$

この式の左辺を z の 3 次関数としてグラフに表した。パラメータ α は $0 < \alpha < 1/2$ の範囲である。



この 3 次方程式 (3-6) の根の様子は α の値によって変化する。

判別式を確認してみると、 $\alpha < 0.147$ で 3 実根、 $\alpha = 0.147$ で重根、 $\alpha > 0.147$ で 1 実根と二つの共役複素根を持つことがわかった。

$\alpha = 0$ では方程式は 2 次方程式になり、根は $v_\infty/\tau g = 1/3, 2$ のふたつになる。

$\alpha < 0.147$ で 3 実根のうちひとつは $v_\infty/\tau g < 1/3$ 、との 2 根はともに $v_\infty/\tau g > 2$ 。

$\alpha = 0.147$ では根のひとつは $v_\infty/\tau g = 0.29$ 、重根は $v_\infty/\tau g = 4.4$ である。

$\alpha > 0.147$ で 1 実根は $v_\infty/\tau g < 1/3$ の範囲にある。

○ここで、 $\alpha = 0$ の場合について詳しく検討する。 α がはじめから厳密にゼロの場合、鎖に頂点が生じて上昇することなく、第 1 章で議論した自由落下において鎖の先端が床に着いてからの場合に対応する。先の結果によれば、定常状態における速度は $\sqrt{h_1 g}$ で、定常状態に漸近する時定数は、 $\tau = \sqrt{h_1/g}/2$ であった。すなわち、 $v_\infty = \sqrt{h_1 g}$ で、 $v_\infty/\tau g = 2$ であり、 τ の小さな「はやい緩和解」である。

○ここで、 $v_\infty/\tau g = 1/3$ の τ の大きな「ゆっくりした緩和解」はどこに含まれているのか? という疑問が生まれる。実際、0 次の項を比較すると、 $(h_1 + h_2)g = v_\infty^2$ 、 $h_2 g = \alpha v_\infty^2$ (7a, 7b) を得た。 $\alpha = 0$ とすれば $h_2 = 0$ 、 $h_1 g = v_\infty^2$ となる。これらより (11) で残る項は

$$\frac{v_\infty^2 v'}{\tau g} = -h' g + 2v_\infty \left(v' - \frac{h'}{\tau} \right) \quad (16)$$

となり、(13)で残る項は、

$$0 = -3 \frac{h'}{\tau} v_\infty + h' g = (-3v_\infty/\tau + g)h' \quad (17).$$

になる。従って、 $h' = 0$ または $v_\infty/\tau g = 1/3$ を得る。

はじめから厳密に $\alpha = 0$ であれば $h_2 = 0$ で、 $h' = 0$ しか取りようがない。 α が微小でも有限であれば $h' \neq 0$ となり得て、 $\alpha \rightarrow 0$ という極限で $v_\infty/\tau g \rightarrow 1/3$ となる解が実現するわけである。実際、 $v_\infty/\tau g$ の3次方程式(15)の振舞いを見ると、 α が微小でも有限であれば $v_\infty/\tau g = 2$ の近傍の実根は $v_\infty/\tau g > 2$ となり、物理的に可能な解を与えるくなってしまう。つまり $v_\infty/\tau g = 2$ となる解は、 $\alpha = 0$ (完全にゼロ) の時に限って許された特殊な解ということになる。

興味深いことは、このときの2種類の解について、定常状態の速さが $v_\infty = \sqrt{h_1 g}$ で等しいにも関わらず、この同じ速さに漸近する時定数 τ が6倍も異なることである。わずかでも上向の初速度を持って始まった「ゆっくりした緩和解」の運動と、それがなかった時の「はやい緩和解」の運動が、解析的に接続しないことの反映である。

現象を支配する有限なパラメータが無限小の極限と、もともとゼロの場合とが異なる、ということは流体力学問題にはしばしばある。典型的な例が粘性の問題である[4]。流体が壁に沿って流れると、粘性によって境界層が生じ、渦度が必然的に生成され、この効果は粘性係数をゼロに近づける極限でも消えないが、最初から粘性をゼロと仮定した場合には現れない。ここではそのような特異性が鎖系で出現していることを強調したい。

参考文献

- [1] P. Gnadug et al 邦訳 近重悠一他「楽しめる物理問題200選」(朝倉書店) 問題103等。山内恭彦他; 大学演習「力学」(裳華房) 第6章 問題B-19等。
- [2] 夏目雄平、高橋利宏; 日本物理学会 2025年秋、領域13 物理教育 17aB157-2。夏目雄平、高橋利宏 “ニュートンビーズ(鎖の噴水)でたぐり出し点から鎖が登っていく非定常過程の考察～非弾性的連結が頂点速度を加速する”、物理教育通信 第201号 p.22~28。および第202号(印刷中)。実験の様子はNHK-TV(地上波全国)の「世界オモシロ学者のスゴ動画祭」でも紹介された。 <https://www.youtube.com/channel/UCQFqnKU-4CP2P9yuJZMrRPw>
- [3] 定常状態に関する標準的論文; J. S. Biggins, M. Warner, Proceedings of The Royal Society A Vol. 470, No. 2163 p. 20130689 (2014). Abu-Nuwar, Emad, Graduate Research Thesis & Dissertations. 4921. これは <https://arxiv.org/pdf/1310.4056.pdf> で見ることが可能である。
- [4] 例えば、巽友正「流体力学」(培風館)8-2節、11-3節、および今井功「流体力学」(裳華房)第6章では、物体表面にできる境界層での渦の発生について論じている。数学的には https://web.math.princeton.edu/~weinan/papers/bdry1.pdf?utm_source=chatgpt.com, <https://arxiv.org/pdf/1610.05372.pdf>