数列の指導法についての考察

茂原樟陽高等学校
木　村　　謙　二

１．等比数列の和の公式

３，６，１２，…，３０７２，…

この数列について，３０７２の次の項は？という問いについて，３０７２＝3×2^{10}，3×2^{11}=６１４４と計算する方はあまりいないと思う。簡単に３０７２×２＝６１４４と計算しているはずだ。では，次の計算をしてもらいたい。

３＋６＋１２＋…＋３０７２

今度は３０７２＝3×2^{10}から考えようとはしていないだろうか，でも実際には１０乗であることを計算する必要は全くない。簡単に３０７２×２－３＝６１４１で計算できる。この計算がみなさんにすんなりと受け入れられるとは思っていません。違和感があって当然だと思います。それは，我々が等比数列の和の公式について本質を教わってこなかったからだと思います。

等比数列の和の公式

$$r \neq 1 \quad \text{のとき} \quad S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

この形の公式が標準であるが，私はこの形こそが問題点があると指摘したい。この形だとｎの値を知りたくなってしまう。また，仮にｎの値が与えられているような場合でも，r^nを実際に計算していくためには，すべての項を計算するのと同等な計算が必要になり（累乗を暗記していれば別だが），あまり便利な公式とはいえなくなってしまうのではないか。そこで，前述の和の計算のように末項の値がはっきりしていれば，ｎの値は不必要である。そこで，この公式から括弧をはずして，展開した式にしてみよう。また，さらに変形すると。

$$r \neq 1 \quad \text{のとき} \quad S_n = \frac{ar^n - a}{r - 1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1}$$

実際生徒には，{（次の項）－（初項)}÷{(公比）－１} の様に指導している。この形で覚えていれば，末項３０７２から次の項６１４４を計算して和を容易に求めることができる。

何故このような違和感のある状態になっているかというと，等比数列の和の公式の導き方にあると思われる。従来の方法としては$rS_n - S_n$を計算する方法か，$a^n - b^n$の因数分解を利用するといった，文字式の変形によって導く方法が一般的だと思います。このような中身の見えない機械的な変形が，本来興味深いはずの等比数列の和の性質から遠ざける要素となっていると思います。ではその興味深いはずの等比数列の和の性質とはどのようなものでしょうか。

２．等比数列の和の性質

メーターが９９９９９から１０００００になる瞬間，わくわくした気持ちを抱くのは私だけではないでしょう。

１＋９＝１０

１０＋９０＝１００

１００＋９００＝１０００

１０００＋９０００＝１００００

１００００＋９００００＝１０００００

というドミノ効果が数学者の心をくすぐると思います。等比数列の和はこの現象と同じ様なことが起きているのです。このわくわく感が授業で生徒と共有できれば最高です。

まずはシンプルに初項１公比２です。これは２進法と絡めて考えるとおもしろいです。

１＋２＋４＋…＋３２７６８＝１１１１１１１１１１１１１１１１$_{(2)}$　（＝$FFFFH$）

これに１を加えると･･･。

次は公比が３で考えてみましょう。このときドミノ効果が起こるように工夫すればいいわけです。３進法で考えれば考えやすいですね。

１＋３＋　９＋…＋２１８７＝１１１１１１１１$_{(3)}$

×２　２＋６＋１８＋…＋４３７４＝２２２２２２２２$_{(3)}$　これに１を加えると･･･。

１０進数の方はわかりにくいのでかくと，

１＋２＝３

３＋６＝９

９＋１８＝２７

・・・

２１８７＋４３７４＝６５６１　　S＝（６５６１－１）÷２＝３２８０

次は初項を１以外にしてやってみます。

３＋６＋１２＋２４＋…＋７６８　これに３を加えると

３＋３＝６

６＋６＝１２

１２＋１２＝２４

・・・

７６８＋７６８＝１５３６　よって７６８の次の１５３６がでてくることとなる。

そして，考えにくいものではあるが，公比を－２でやってみます。

１－２＋４－８＋…＋１０２４

×（－３）　－３＋６－１２＋２４－…－３０７２　　これに１を加えると

１－３＝－２
－２＋６＝４
４－１２＝－８
・・・
１０２４－３０７２＝－２０４８
ドミノ効果という印象はないものの，元の数列が見えてくるでしょう。

以上をまとめてみると次のような結果が得られます
（1）　全体を（公比－１）倍して飽和状態を作る
（2）　初項を加えてドミノ効果を起こす
（3）　末項の次の項が得られる
式で書けば $(r-1)S_n+a_1=a_{n+1}$ 　となる。
これを $S=$に変形してやると，和の公式 {(次の項) －（初項)} ÷ {(公比) －1} が得られる。

この指導において大事なポイントは，等比数列は自分自身に和もしくは和の元になる値があるということである。即ち，数列から離れた全く別個な計算をすることなしに，自分自身の数列の値から計算をすべきだ，ということである。

３．階差数列での指導

階差数列が等差数列になればΣを使えば解くことができるが，いつもΣを使っていると，階差数列が等比数列になったとき，パニックになってしまう生徒はいないだろうか。このとき，みなさんはどのような解法の仕方を示しているだろうか。Σで書かないというのは勿論であるが，第ｎ－１項がでてきたりして，等比数列の和の公式のｎ乗の部分がすっきりした形で使えるだろうか，という問題がある。自分自身が学生だったときも，この部分に関しては，どうも満足できる認識が得られなかった記憶がある。仮に先生に質問しても，どうも言葉で誤魔化されてしまうのではないか，という気がしてならない。そこで第何項かをすっきりとさせるため次のように指導している。

$a_n=a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$　b_nは等比数列
（等比数列の時はΣを使わずに末項が第何項であるかを明記する）
ｎ－１の次の項はｎ項なので，和の（次の項）は一般項の式をそのまま使えばよい（ラッキー)。結局元に戻るわけで，ここでこのラッキーを強調しておくと効果がある。

例　３，４，６，１０，１８，３４，６６，…の一般項を求める

階差数列をとると，１，２，４，８，１６，３２，…よって$b_n=2^{n-1}$
（ここでこの$b_n=2^{n-1}$を和の次の項の部分にそのまま使って）
$a_n=3+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$
$=3+(2^{n-1}-1)\div(2-1)$

$=2^{n-1}+2$
これはｎ＝１の時にも成り立つ

４．二項間漸化式での指導

二項間漸化式の代表的な形，$a_{n+1}=pa_n+q$，の解法といえば，
（１）　階差数列をつくる方法
（２）　特性方程式による方法
の２つがあるが，なかなか理解しにくい部分の問題である。特に②の方法は使いこなせれば便利なのであるが，そこに至るまでが厳しいものがある。また特性方程式の解αとはいかなる値なのか，ここではよくある質問である。みなさんはどのように生徒に返答しているだろうか。まあ，この数列が収束するとして，その極限値をαとすることにより特性方程式ができる，位の話はできるとしても，私自身すっきりとした説明はできていない。しかし，次のように具体的数値を補うことで少し理解に近づけることができた気がした。

例　$a_1=8$，$a_{n+1}=2a_n-3$（ｎ＝１，２，３，…）

具体的にかくと，８，１３，２３，４３，８３，１６３，

（１）　階差数列をとると，５，１０，２０，４０，８０，…
これはこれで非常に意味を持つ。即ち，この漸化式で与えられる数列は前述の階差が等比になるパターンと一緒であるということだ。ですから，前の授業で得意になっていれば喰い付きはよい。

（２）　マジックナンバーαを探させる
「この数列のすべての数からからある特別な数を引くと，なんときれいな数列になるという。では，そのある数とはいったいいくつだろうか？」
全体から３を引くと，５，１０，２０，４０，８０，…
この関係を式で書けば，$a_n-3=5\times2^{n-1}$，となる訳だが，この３はどのように見つけられるのだろうか。そして，このαを使うとどうして等比数列にできるのか，漸化式を変形することによって確認してみよう。といった具合に話を進める。

ここでは文字式の変形ばかりに終始してしまい易い傾向にあるので，生徒の難しいという印象に一層拍車をかけ，問題からの逃避を加速させていないだろうか。勿論，ある一定レベル以上の生徒に関しては，飛んでしまえば簡単なハードルで，より多彩なパターンへと進むことができるであろうが，一般的な高校生には反り立つ壁の如くに見えるのであろう。そこで，指導者側としては，飛べそうだという気にさせる工夫として，具体的数値が大事になってくると思う。更には生徒によるαの発見という高見にまで登れれば申し分のないものとなろう。または，漸化式に入る前に階差が等比のところでαの存在について学習しておくといった方法もあると思われる。

5．Σの公式

Σｋの公式の説明として，２つの階段状のものを組み合わせて長方形を作るのが一般的であるが，それ以降の公式の説明が，急に文字式の変形となってしまうのに不満を覚えた方はいないだろうか。私は大いに不満であった。そこで，自分で作ってしまおうと思い至ったのである。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この公式から考えられることは，６個組み合わせればｎ，ｎ＋１，２ｎ＋１の辺を持つ直方体になる，ということだ。では１＋４＋９＋１６を細かい立方体を組み合わせた立体図形を６つ作ってみようと考え，実際に制作してみた。各１，４，９，１６は底面が正方形なので，これを階段状に重ねてみた。丁度，ピラミッドを上から見て，４つの三角形がそれぞれ半分になるように，真上から十字に４分割した時の１つの図形ができあがる（写真１）。この階段状の部分がうまく組み合わされて，６個でうまく直方体ができるはずだと（写真２）。実際にやってみると，すんなりとはいかないまでも，見事に直方体ができ感動できる。できれば何セットも作り，たくさんの生徒がチャレンジできるといいと思う。参考のため，展開図を載せておく（写真３）。

写真１

写真２

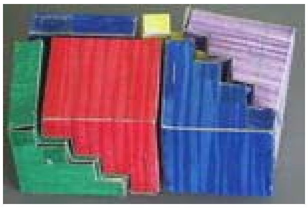
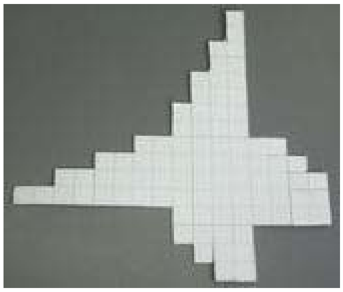
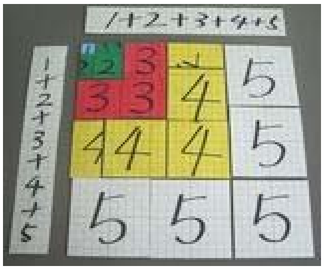


写真３（のりしろを含んでいます）



$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

写真４



これは４次元？一瞬の躊躇がある。しかし，この公式でみなさんが一度は思っただろうこと，そうこの右辺はΣｋを使っている。そして，最終形は二乗だ。二乗といえば正方形！そう，これは一辺がΣｋの正方形を目指せばよいことになる。そして各パーツは平面図形でいいはずである。そこで正方形にこだわってみたら次のようなパーツができた。（１×１）×１，（２×２）×２，（３×３）×３，（４×４）×４，（５×５）×５，…。これらを組み合わせていくと，正方形が…できない。しかし，偶数番目には１つだけ半分に割れるようにしたらうまくいった。

後日気がついたことだが，このパズルの元は既に小学校の学習内容にあったのだ。それも小学校二年生である。それは実は九九の表であった。えっと思った人は，九九の表を睨み続けてください。単純に「九九の表をすべて足すといくつになる」から入るという方法もありますね。