数学 A 1年＿＿組＿＿番 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

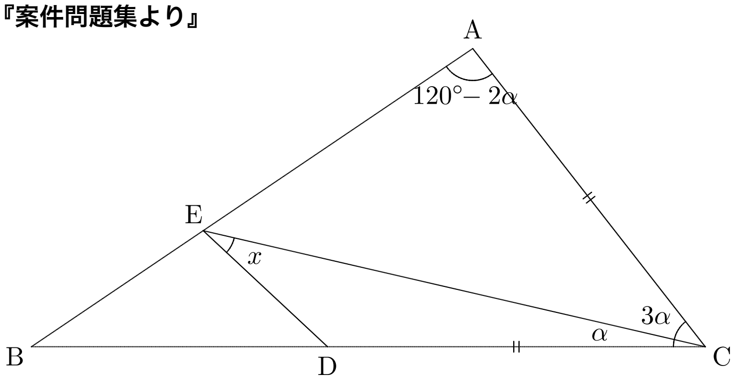
Mathematic A

案件問題

『案件問題集より』

図のような $\angle\mathrm{BCE} = \alpha$, $\angle\mathrm{ACE} = 3\alpha$, $\angle\mathrm{BAC} = 120^\circ - 2\alpha$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ とその辺 BC，AB 上の点 D, E がある。

AC = DC が成り立つとき，$\angle\mathrm{CED}$ の大きさを求めなさい。



この問題の図を描くにはどうすればよいでしょう。

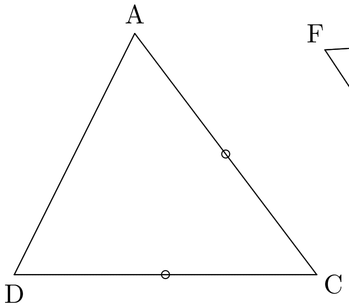
$\triangle\mathrm{CAD}$ は二等辺三角形なので，線分 AD を引けば，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{DAC} = 90^\circ - 2\alpha$ なので，$\angle\mathrm{BAD} = 120^\circ - 2\alpha - (90^\circ - 2\alpha) = 30^\circ$ です。そこで，図を描く際に，次のような手順で描きました。

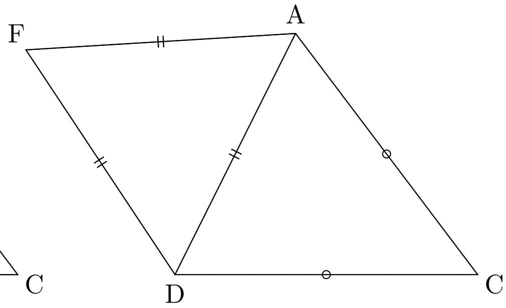
$\boxed{1}$ 辺 DC を描く。

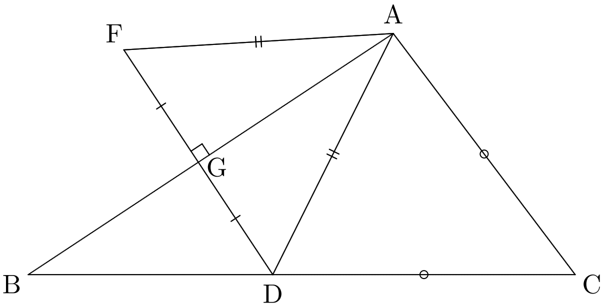
$\boxed{2}$ 二等辺三角形 ADC を描く。

$\boxed{3}$ 辺 AD を一辺とする正三角形 ADF を，辺 AD に対して C とは反対側に描く。

$\boxed{4}$ A から，DF に垂線 AG を引き，AG と CD の交点を B とする。

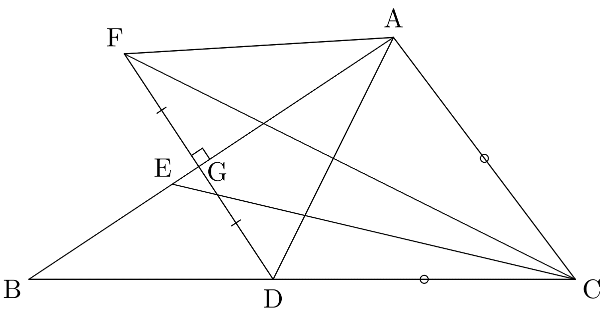


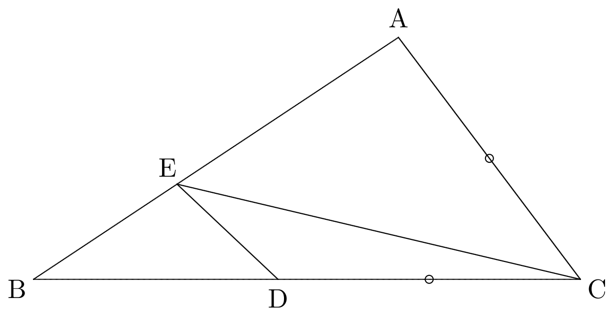




$\boxed{5}$ 線分 CF を引き，$\angle\mathrm{FCD}$ の二等分線を引き，AB との交点を E とする。

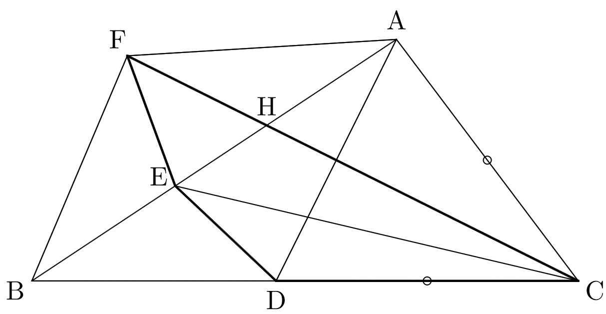
$\boxed{6}$ 線分 CE，ED を引き，余分な線を消す。

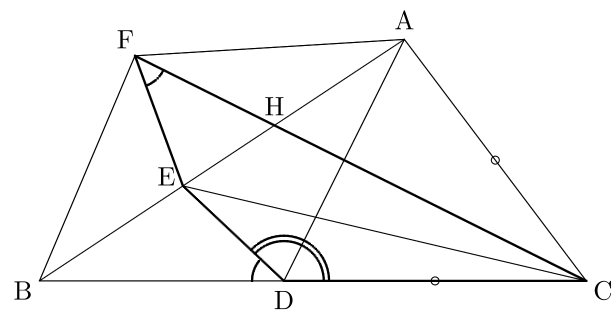




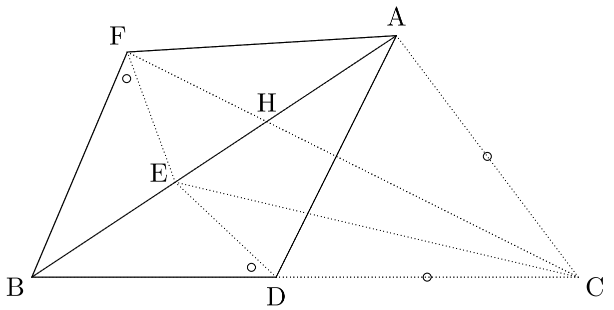
作図の手順から，$\angle\mathrm{CFD} = 30^\circ$ となりますが，これと問題の $\angle\mathrm{CED}$ が等しいことが確認できれば良いわけです。

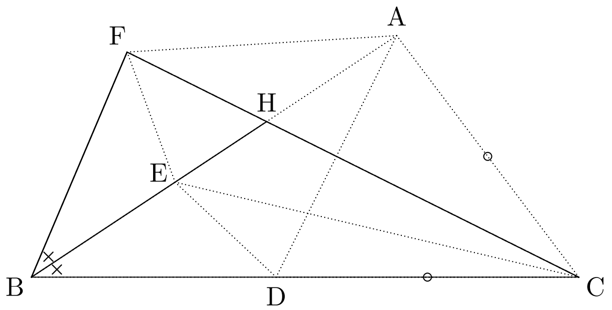
そこで，4 点 CDEF が同一円周上にある，同じことですが，四辺形 CDEF が円に内接することを確認できますか？という方針で問題にあたってみます。証明のために新しく，AB と CF の交点を H としました。図を良く観てみましょう。





四辺形 CDEF が円に内接する為の**必要十分条件**のうち，判りやすいものはどれでしょうか。ここでは，∠EDB と ∠EFH に注目してみましょう。∠EDC の外角が ∠BDE ですから，これと ∠EFH が同じであることが判れば，四辺形 CDEF が円に内接することが確認できます。作図の過程から，△ABD と △ABF は合同です。つまり ∠BDE = ∠BFE です。目標は ∠BDE = ∠EFH ですから，∠BFE = ∠EFH，つまり線分 FE が ∠HFB の二等分線であることが確認できればよいことになります。





△CBF において，BH は ∠B の二等分線なので，

$$\mathrm{BF : BC = HF : HC} \quad \text{あるいは，} \quad \mathrm{BF : HF = BC : HC}$$

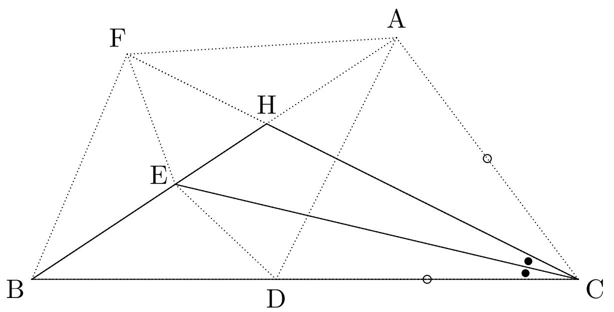
一方 △CHB において，CE は ∠HCB の二等分線なので，

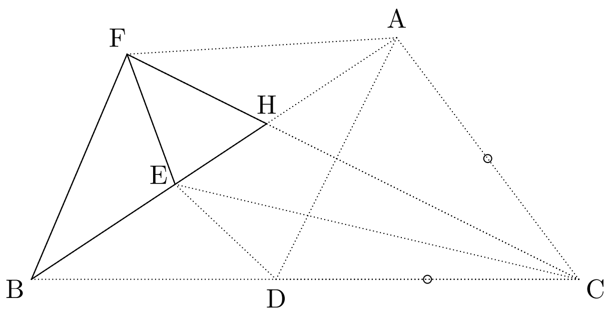
$$\mathrm{BC : HC = BE : EH}$$

以上より，

$$\mathrm{BF : HF = BE : EH}$$

なので，△FBH において，FE が ∠BFH の二等分線であることが判ります。





(※　点 E が △FBC の**内心**になっているということです。)

従って，

$$\angle\mathrm{HFE} = \angle\mathrm{BFE} = \angle\mathrm{BDE} \quad = (\angle\mathrm{EDC}\ \text{の外角})$$

よって，四辺形 CDEF は円に内接するので，

$$x = \angle\mathrm{DEC} = \angle\mathrm{DFC} = 30^\circ$$