2003年度マーク式問題集(数学I・A) 京都府立洛東高等学校数学科編

____年____組____番　氏名_____

///// 2001**年度の追試「数学**I•A**」** ///

1. a を実数，b を $3b^2-8b-3\neq 0$ となる実数とする。また，2 次関数

$$y=-2x^2-4x+a$$

$$y=(3b^2-8b-3)x^2+5$$

の表す放物線をそれぞれ C_1, C_2 とする。

(1) C_1 の頂点の座標は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ a+\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。

(2) C_2 が x 軸と 2 点 A，B で交わるような b の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}<b<\boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

である。

また，b が　の範囲内の整数であるとき，線分 AB の長さが最小になるのは $b=\boxed{\text{ク}}$ のときで，このとき線分 AB の長さは，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{2}$ である。

(3) C_1 の頂点が C_2 上にあるとする。このとき，

$$a=\boxed{\text{サ}}\,b^2-\boxed{\text{シ}}\,b$$

が成り立つ。

さらに，C_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{ス}}$ だけ平行移動すると，再び頂点は C_2 上にある。ただし，$\boxed{\text{ス}}$ には 0 でない数を入れよ。

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス

2. A,B,C,D の文字が一つずつ書いてある 4 枚のカードが箱に入っている。この箱から 1 枚のカードを取り出してもとに戻す。この試行を 4 回繰り返し，以下のように得点を定める。

(a) 文字 A の書かれたカードを引いた回数が 1 回ならば 1 点。

(b) 文字 A の書かれたカードを引いた回数が 2 回ならば 2 点。

(c) その他の場合。すなわち，文字 A の書かれたカードを引いた回数が 0 回，3 回または 4 回のときは 0 点。

(1) A，B，C，D の文字のカードがすべて現れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(2) 得点が 1 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ である。

(3) 得点が 0 点である確率は確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネノ}}}$ である。

(4) 得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ 点である。

セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ

3. a を正の実数，b を実数とする。x の整式 P, Q を

$$P = 2x^3 + (a+2)x^2 + (3a+2)x + a + \frac{1}{a}$$

$$Q = x^2 + x + b$$

とおく。P を Q で割ったときの余り R を $Ax + B$ とすると

$$A = \boxed{\text{ア}}\,a - 2b + \boxed{\text{イ}}$$

$$B = -ab + a + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{a}$$

である。

(1) $b = 0$ とする。$x = \dfrac{3}{2}$ とすると，R は $a = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(2) 次の文章中の $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ に下の　～　のうちから当てはまるものを選べ。

$a = 1$ のとき，$A > 0$ は $B > 0$ が成り立つための $\boxed{\text{キ}}$。

$a = 2$ のとき，$A > 0$ は $B > 0$ が成り立つための $\boxed{\text{ク}}$。

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，$A > 0$ は $B > 0$ が成り立つための $\boxed{\text{ケ}}$。

必要十分条件である

必要条件であるが十分条件ではない

十分条件であるが必要条件ではない

必要条件でも十分条件でもない

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ

4. 半径 R の円 O に内接する四角形 ABCD は

$$\mathrm{A}B = \mathrm{A}D = \sqrt{3}, \qquad \cos\angle \mathrm{B}AD = -\frac{1}{3}, \qquad \cos\angle \mathrm{A}BC = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

を満たす。このとき

$$\mathrm{B}D = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}, \qquad R = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

$$\sin\angle \mathrm{A}BC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \qquad \mathrm{A}C = \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

$$\mathrm{C}D = \boxed{\text{チ}}$$

である。

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ

5. **【選択問題】　数列の問題**

p を 0 でない実数とし，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が,

$$S_n = pn^2 - pn + p + 3$$

で表されている。このとき,

$$a_1 = p + \boxed{\text{ア}}, \qquad a_2 = \boxed{\text{イ}}\,p, \qquad a_3 = \boxed{\text{ウ}}\,p$$

である。

(1) $\{a_n\}$ が等差数列のとき，$p = \boxed{\text{エオ}}$ であり,

$$a_n = \boxed{\text{カキ}}\,n + \boxed{\text{ク}}$$

となる。さらに,

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)a_k = \boxed{\text{ケコサシス}}$$

である。

(2) $\{b_n\}$ を公比 r の等比数列とし,

$$b_1 = a_1, \qquad b_2 = -2a_2, \qquad b_3 = 3a_3$$

とする。このとき、

$$r = \boxed{\text{セソ}}, \quad p = \boxed{\text{タ}}$$

である。また,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k > 900$$

となる n のうちで最小のものは $\boxed{\text{チ}}$ である。

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ

///// 2000 **年度の追試「数学** I•A**」** ///

1. a は $a^2-3\neq 0$ を満たす実数とし，C を 2 次関数

$$y=(a^2-3)x^2-2ax+4$$

のグラフとする。

(1) グラフ C の表す放物線が上に凸で，頂点の x 座標が負であるような a の範囲は

$$\boxed{\text{ア}}<a<\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

(2) $a=3$ とする。このとき、C は $x=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ を軸とする放物線であり，2 次関数　の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3) $a=-1$ とする。n を 0 でない整数とし，グラフ C を x 軸方向，y 軸方向にそれぞれ $\dfrac{1}{n}$ だけ平行移動した放物線を表す 2 次関数を

$$y=-2x^2+bx+c$$

とする。このとき，b，c がともに整数となるような n は $n=\pm\boxed{\text{キ}}$, $n=\pm\boxed{\text{ク}}$, である。（**キ** と **ク** は，回答の順序を問わない。）

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク

2. 1から6までの番号のつけられている6枚のカードがあり，横一列に配置されている。はじめの配列は1，2，3，4，5，6である。二つのさいころを同時に振るたびに，出た目によってカードの配置を換えていく。もし，出た二つの目が異なるなら，その目と同じ番号のカードの位置を交換し，出た目が同じなら，カードの位置を変えないものとする。

(1) 二つのさいころを1回振って配置が変わらない確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(2) 二つのさいころを1回振って，番号1のカードの位置がはじめの配置と異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

(3) 二つのさいころを2回振って，番号1，2，3，4の4枚のカードの位置がどれもはじめの配置と異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(4) 二つのさいころを2回振って，位置がはじめの配置と異なるカードが番号1，2，3の3枚のみである確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ

3. a を実数とする。

(1) x の整式 A，B を

$$A = x^4 - (a+8)x^2 - 2ax + 4a + 1$$

$$B = x^2 - 2x - a$$

とする。A を B で割ったときの商は $x^2 + \boxed{\text{ア}}\,x - \boxed{\text{イ}}$，余りは $\boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オ}}$ となる。

(2) $p = -1 + \sqrt{5}$ とおく。p は 2 次方程式

$$x^2 + 2x - \boxed{\text{カ}} = 0$$

の解の一つであり，

$$p^4 - (a+8)p^2 - 2ap + 4a + 1 = \boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。また，整数 n が $\boxed{\text{コサ}}$ または $\boxed{\text{シ}}$ に等しいとき

$$\{p^4 - (a+8)p^2 - 2ap + 4a + 1\} + (n^2 + 2n\sqrt{5})p$$

は整数となる。

イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ

4. 四角形 ABCD は，円 O に内接し，

$$2\mathrm{AB} = \mathrm{BC}, \qquad \mathrm{CD} = 2, \qquad \mathrm{DA} = 1, \qquad \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{5}{8}$$

を満たしている。このとき，$\mathrm{AC} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。また，円 O の半径は $\dfrac{2}{13}\sqrt{\boxed{\text{タチツ}}}$ で，$\mathrm{AB} = \sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である。さらに，

$$\mathrm{BD} = \frac{4}{5}\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}, \qquad \cos\angle\mathrm{BCD} = \frac{2}{5}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ

5. **【選択問題】　数列の問題**

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。ここで，初項 $a_1 = 38$，第 $(m+1)$ 項 $a_{m+1} = 5$，$S_{m+1} = 258$ とする。

このとき，$m =$ **アイ** であり，公差は **ウエ** である。また，S_n は $n =$ **オカ** のとき最大となり，その最大値は **キクケ** である。

(2) 等比数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 と公比 r は正の数とし，$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とおく。この数列 $\{T_n\}$ は $5T_2 = 4T_4$ を満たすとする。

ここで，$T_4 = (r^2 +$ **コ** $)T_2$ であるので，数列 $\{b_n\}$ の公比は $r = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

さらに p を定数とし，$U_n = p + T_n$ とおく。$p =$ **スセ** b_1 であるならば，数列 $\{U_n\}$ は等比数列になる。

オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ

///// 2004 **年度の本試験「数学 I・A」(数学 I の問題も含む)** /////////////////////////////////////

1. a を定数とし，2 次関数

$$y = -x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3$$

のグラフを C とする。

(1) グラフ C の頂点の座標は

$$\left(\frac{2a - \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \frac{-4a^2 + \boxed{\text{ウエ}}}{4} \right)$$

である。

(2) グラフ C と x 軸が異なる 2 点で交わるための a の範囲は

$$-\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}} < a < \frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

である。

(3) a は　を満たす整数とする。このとき、グラフ C と x 軸との二つの交点の x 座標がともに整数となるのは，$a = \boxed{\text{ク}}$ または $a = \boxed{\text{ケコ}}$ の場合であり，その場合に限る。$a = \boxed{\text{ケコ}}$ のとき，交点の x 座標は $\boxed{\text{サシ}}$ と $\boxed{\text{スセ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{サシ}}$ と $\boxed{\text{スセ}}$ は解答の順序を問わない。

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ

2. 一つのさいころを 2 回続けて投げ，出た目の数を順に a，b とするとき，$u = \dfrac{a}{b}$ とおく。

(1) $u = 1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(2) $u > 1$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(3) u が整数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(4) T を次で定義する。

$$u \text{ が整数になる場合} \begin{cases} u \text{ が偶数ならば } T = u \\ u \text{ が奇数ならば } T = 1 \end{cases}$$

u が整数にならない場合 $T = 0$

このとき，t の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ である。

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ

3. m，n を整数とする。x の整式

$$A = x^3 + mx^2 + nx + 2m + n + 1$$

を考える。

(1) x の整式 B を

$$B = x^2 - 2x - 1$$

とする。A を B で割ると，商 Q と余り R はそれぞれ

$$Q = x + (m + \boxed{\text{ア}})$$

$$R = (2m + n + \boxed{\text{イ}})x + (3m + n + \boxed{\text{ウ}})$$

である。

また，$x = 1 + \sqrt{2}$ のとき，B の値は $\boxed{\text{エ}}$ であり，さらにこのとき，A の値が -1 であるならば，m，n は整数だから，

$$m = \boxed{\text{オ}},\ n = \boxed{\text{カキ}}$$

である。

(2) 次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の (0)〜(5) のうちから一つ選べ。

x がどのような奇数であっても A の値が常に偶数になるための必要十分条件は $\boxed{\text{ク}}$ となることである。

(0) m が奇数　(1) n が奇数　(2) $m - n$ が奇数

(3) m が偶数　(4) n が偶数　(5) $m - n$ が偶数

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク

4. 平面状に 2 点 O，P があり，$\mathrm{OP} = \sqrt{6}$ である。点 O を中心とする円 O と点 P を中心とする円 P が，2 点 A，B で交わっている。円 P の半径は 2 であり，$\angle \mathrm{AOP} = 45^\circ$ である。このとき，円 O の半径は

$$\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} + \boxed{\text{コ}} \quad \text{または} \quad \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$$

である。　以下，円 O の半径が $\sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$ のときを考える。

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である。　また，OA の A 側への延長と円 P の交点を C とするとき，三角形 ABC について，

$$\angle \mathrm{CAB} = \boxed{\text{スセソ}}\ ^\circ, \qquad \mathrm{BC} = \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

【数学　の場合】

よって，四角形 AOBP の面積は

$$\boxed{\text{ツ}} - \sqrt{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

$$\cos \angle \mathrm{APB} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であるから，$\angle \mathrm{APB} = \boxed{\text{ニヌ}}\ ^\circ$ である。扇形 PAB，扇形 OAB の面積を計算することにより，円 O の内部と円 P の内部の共通部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ネ}} - 2\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{6}\pi - \left(\boxed{\text{ハ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}\right)$$

であることがわかる。

ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ

5. **【選択問題】　数列の問題**

(1) 整数からなる等比数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 + a_2 = 32$，$a_4 + a_5 = 864$ を満たしている。このとき，

$$a_n = \boxed{\text{ア}} \cdot \boxed{\text{イ}}^{\,n-1}$$

であり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + 4k - 2) = \boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}}^{\,n} + \boxed{\text{オ}}\,n^2 - \boxed{\text{カ}}$$

となる。

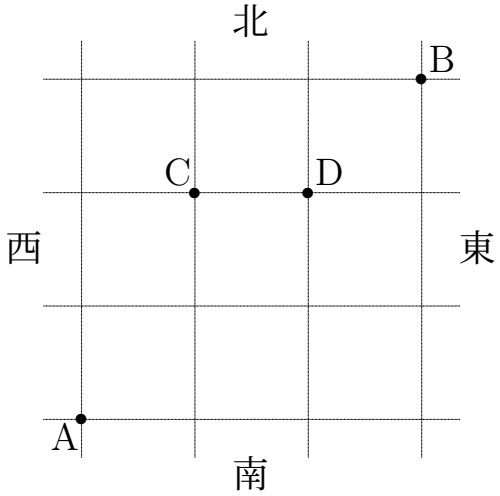
(2) 分数 $\dfrac{9}{37}$ を小数で表したときに小数第 n 位に表れる数を b_n とする。すべての自然数 n に対して $b_{n+p} = b_n$ となる最小の自然数 p は $\boxed{\text{キ}}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{100} b_k = \boxed{\text{クケコ}}$$

である。

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ

6. **【数学　の問題】**図のように，東西にはしる道が 4 本，南北にはしる道が 4 本ある。



(1) A 地点から B 地点に行く経路のうち最短の経路は **アイ** 通りある。ただし，A 地点から B 地点に行くときに C 地点を通ることがあってもよい。

(2) A 地点から B 地点に行き，続いて C 地点に行く経路のうち最短の経路は **ウエ** 通りある。ただし，A 地点から B 地点に行くときに C 地点を通ることがあってもよい。

(3) A 地点から C 地点と D 地点の両方を通って B 地点に行く経路のうち最短の経路は **オ** 通りある。

(4) A 地点から B 地点に行く最短の経路のうち，C 地点と D 地点の少なくとも一つの地点を通るものは **カキ** 通りある。

(5) A 地点から C 地点と D 地点の両方を通って B 地点に行き，続いて B 地点から C 地点も D 地点も通らずに A 地点にもどる経路のうち，最短の経路は **クケ** 通りある。

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ